

7М, спецкурс, листок 10

15 ноября 2022

Инварианты

Инвариантами называются величины или свойства, не меняющиеся на протяжении всего процесса.

0 Изначально на доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b , стереть их, а на их месте написать числа

a $\frac{5a-3b}{2}$ и $\frac{5b-3a}{2}$;

b $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$.

Можно ли такими операциями получить числа 6, 7, 8?

1 Каждым ходом компьютер выводит на экране ещё одно число, которое больше предыдущего либо на сумму двух первых цифр (если эта сумма цифр делится на 4), либо на 10 (если она на 4 не делится). Вначале на экране было только число 13. Появится ли на экране в какой-то момент число 444444?

Подсказка: Напишите несколько первых чисел. Какое свойство у них сохраняется? Почему?

2 На доске 7×7 без угловых клеток сидят 45 жуков, по одному в клетке. Каждую минуту все жуки одновременно переползают в понравившуюся им соседнюю по стороне клетку. Какое наибольшее число жуков сможет собраться в одной клетке?

Подсказка: Экспериментировать легче на маленькой доске.

3 На экране компьютера выведено число 15432022. Каждую секунду компьютер уменьшает его на его сумму цифр, пока не получится однозначное число. Какое именно однозначное число это будет?

4 На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая её по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но

a рубашкой вверх; **b** рубашкой вниз и вверх ногами?

5 В трёх кучках 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую 5 камней.

a Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на один камень?

b Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

6 Изначально на доске написаны числа 10, 20, 30, 40, 50. Разрешается выбрать любое число, уменьшить его в простое число раз (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из других чисел увеличить в другое простое число раз (например, 50 и 20 заменить на $50:5=10$ и $20 \cdot 7=140$). Докажите, что такими операциями нельзя получить набор чисел 20, 30, 40, 50, 60.

7 Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7000000 рублей. На все деньги он сразу купил сгущённое молоко в стеклянных банках по цене 7 рублей за банку (пустая банка стоила в то время 1 рубль). Он узнал, что каждую ночь и стоимость сгущёнки, и стоимость пустой банки вырастали в два раза. Постепенно съедая сгущёнку, Гулливер иногда по утрам ходил сдавать пустые банки и на вырученные деньги покупал ещё сгущёнки. Других доходов у него не было. Какое наибольшее число банок сгущёнки мог съесть Гулливер?

8 На столе лежит куча из 2222 орехов. Из неё съедают один орех и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, где больше двух орехов, снова съедают один орех, а остальную кучу делят на две и т.д. Какое наибольшее число орехов можно съесть, оставив на столе кучи не менее чем из трёх орехов каждая?

9 Три мухи, Чарльз, Майкл и Стивен, решили покататься на стрелках часов. В полдень Чарльз сел на часовую стрелку, Майкл на минутную, а Стивен на секундную. Каждый раз, когда какие-то две стрелки совпадали, мухи на них менялись местами. Сколько кругов проехала каждая из мух до полуночи?

7М, спецкурс, листок 10

15 ноября 2022

Инварианты

Инвариантами называются величины или свойства, не меняющиеся на протяжении всего процесса.

0 Изначально на доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b , стереть их, а на их месте написать числа

a $\frac{5a-3b}{2}$ и $\frac{5b-3a}{2}$;

b $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$.

Можно ли такими операциями получить числа 6, 7, 8?

1 Каждым ходом компьютер выводит на экране ещё одно число, которое больше предыдущего либо на сумму двух первых цифр (если эта сумма цифр делится на 4), либо на 10 (если она на 4 не делится). Вначале на экране было только число 13. Появится ли на экране в какой-то момент число 444444?

Подсказка: Напишите несколько первых чисел. Какое свойство у них сохраняется? Почему?

2 На доске 7×7 без угловых клеток сидят 45 жуков, по одному в клетке. Каждую минуту все жуки одновременно переползают в понравившуюся им соседнюю по стороне клетку. Какое наибольшее число жуков сможет собраться в одной клетке?

Подсказка: Экспериментировать легче на маленькой доске.

3 На экране компьютера выведено число 15432022. Каждую секунду компьютер уменьшает его на его сумму цифр, пока не получится однозначное число. Какое именно однозначное число это будет?

4 На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая её по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но

a рубашкой вверх; **b** рубашкой вниз и вверх ногами?

5 В трёх кучках 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую 5 камней.

a Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на один камень?

b Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

6 Изначально на доске написаны числа 10, 20, 30, 40, 50. Разрешается выбрать любое число, уменьшить его в простое число раз (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из других чисел увеличить в другое простое число раз (например, 50 и 20 заменить на $50:5=10$ и $20 \cdot 7=140$). Докажите, что такими операциями нельзя получить набор чисел 20, 30, 40, 50, 60.

7 Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7000000 рублей. На все деньги он сразу купил сгущённое молоко в стеклянных банках по цене 7 рублей за банку (пустая банка стоила в то время 1 рубль). Он узнал, что каждую ночь и стоимость сгущёнки, и стоимость пустой банки вырастали в два раза. Постепенно съедая сгущёнку, Гулливер иногда по утрам ходил сдавать пустые банки и на вырученные деньги покупал ещё сгущёнки. Других доходов у него не было. Какое наибольшее число банок сгущёнки мог съесть Гулливер?

8 На столе лежит куча из 2222 орехов. Из неё съедают один орех и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, где больше двух орехов, снова съедают один орех, а остальную кучу делят на две и т.д. Какое наибольшее число орехов можно съесть, оставив на столе кучи не менее чем из трёх орехов каждая?

9 Три мухи, Чарльз, Майкл и Стивен, решили покататься на стрелках часов. В полдень Чарльз сел на часовую стрелку, Майкл на минутную, а Стивен на секундную. Каждый раз, когда какие-то две стрелки совпадали, мухи на них менялись местами. Сколько кругов проехала каждая из мух до полуночи?