

7М, спецкурс, листок 9

10 ноября 2022

От малых к большим

Как придумать большой пример? Часто бывает полезно сначала придумать маленький, а потом сделать из него большой (при помощи повторов или по аналогии).

1 Заполните клетки доски $2 \times n$ крестиками и ноликами так, чтобы у каждого крестика был ровно один сосед-крестик, а у каждого нолика — ровно два соседа-нолика. Разберите случаи **a** $n = 4, 5, 6$; **b** $n = 12, 13, 14$.

2 На левом берегу реки три человека и 10 ящиков. Есть трёхместная лодка, каждое место может занимать человек или ящик. Ящики тяжёлые, погрузить в лодку или выгрузить из лодки можно только втроем. Других людей нет. Как им всем переправиться на правый берег и перевезти все ящики?

3 Как нарисовать на клетчатой бумаге по линиям сетки **a** 12-угольник площади 5; **b** 20-угольник площади 9; **c** 100-угольник площади 49?

Маленькие примеры могут помочь строить большие. Но помните, что для доказательства рассмотрения маленьких примеров недостаточно, обязательно нужно провести какие-то общие рассуждения.

4 Есть n монет достоинствами $1, 2, 3, \dots, n$ динаров. Какое наибольшее число человек может поделить их поровну?

a Найдите ответ для $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

b Найдите ответ для $n = 99, 100$.


5 На каждой клетке клетчатой полоски 1×80 стоит по шашке: слева 40 белых, справа — 40 чёрных. За один ход можно пару соседних шашек, где слева белая, а справа чёрная, поменять местами. За какое число ходов можно получить позицию, где слева 40 чёрных, справа — 40 белых?

6 *Палиндромом* называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево. При каких n разность двух n -значных палиндромов может быть равна 110?

Иногда дополнительная сложность состоит в том, чтобы понять, какие именно маленькие примеры имеет смысл рассматривать.

7 Запишите в строку 19 целых чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была отрицательна, а сумма всех чисел была положительна.

8 Из чисел $1, 2, 3, \dots, 33$ одно вычеркните, а остальные разбейте на пары так, чтобы разности в парах были $1, 2, 3, \dots, 16$.

9 В мастерской изготавливают квадратные решётки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из трёх стержней длиной 1, сваренных под прямым углом в виде буквы П  (см. рисунок). При изготовлении решётки запрещается накладывать стержни друг на друга; можно лишь сваривать их между собой в точках касания. Покажите, как изготовить решётку **a** 5×5 ; **b** 2021×2021 .