

7М, спецкурс

Зачет 22 ноября. Программа.

Билет будет содержать один теоретический вопрос, несколько простых упражнений, две задачи из приведенного списка и несколько новых задач.

Список теоретических вопросов

- 1 Делимость нацело (определение). На какие числа делится 0? Какие числа делятся на 0?
- 2 Деление с остатком (определение).
- 3 Признаки делимости на 2, 4, 5, 25. Как найти остатки от деления на эти числа?
- 4 Признаки делимости на 3, 9. Как найти остатки от деления на эти числа?
- 5 Признаки делимости на 11. Как найти остаток от деления на 11? (Без доказательства.)
- 6 Зацикливающиеся последовательности, период, предпериод. Однозначно ли выделяются период и предпериод?
- 7 Теорема о зацикливании вперед (без доказательства). Поясните на каком-нибудь нетривиальном примере, что такое «состояние системы».
- 8 Теорема о зацикливании назад (без доказательства). Поясните на каком-нибудь нетривиальном примере, что такое «состояние системы».
- 9 Задача о количестве перестановок (про очередь): решение и ответ.
- 10 Задача о количестве подмножеств (выбор произвольного числа предметов из данного набора): решение и ответ.
- 11 Задача о числе сочетаний: формулировка и решение.

Примеры упражнений

- 1 Переведите с языка кванторов на русский: $\exists x \forall y (y : x)$.
- 2 Запишите на языке кванторов: «для каждого числа существует противоположное ему».
- 3 Число $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.
- 4 Разделите -43 на -15 с остатком.
- 5 Найдите остаток от деления 15432022 \boxed{a} на 9; \boxed{b} на 11.
- 6 Делимое и делитель увеличили в 2022 раза. Как изменились неполное частное и остаток?
- 7 Найдите последнюю цифру 23^{64} .
- 8 В турнире каждая из десяти команд-участниц сыграла по одному разу с каждой другой. Сколько всего матчей сыграно?
- 9 Сколько десятизначных чисел можно составить из четырёх единиц и шести двоек?

Список задач

Числа и другие детали в задачах могут меняться. От вас требуется не выучить наизусть решения всех задач, а разобраться в них и быть готовым воспроизвести соответствующие рассуждения.

1 Докажите свойства делимости:

a из $x:a$ и $y:a$ следует $(x+y):a$;

b Если $a:b$ и $b:c$, то $a:c$

c $a:b$ и $b:a$, то либо $a=b$, либо $a=-b$

d $x:y$ равносильно $ax:ay$, если $a \neq 0$.

2 Натуральные числа a и b таковы, что $56 \cdot a = 65 \cdot b$. Докажите, что число $a+b$ составное.

3 Докажите, что если a и b дают одинаковые остатки при делении на c , тогда и только тогда, когда $(a-b):c$. (Для удобства можете считать, что $c > 0$.)

4 Найдите наименьшее натуральное число (не равное одному), которое дает остаток 1 при делении на 2, 3, 5, 7.

5 Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

6 Число $666 \star 15432022 \star$ дает остаток 71 при делении на 90. Какие цифры мы заменили звездочками?

7 Докажите, что число \overline{abc} дает тот же остаток от деления на 7, что и $2a + 3b + c$.

8 Докажите, что число $\overline{abcdefghi}$ дает тот же остаток от деления на 37, что и $\overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}$.

9 Придумайте последовательность, состоящую только из 1 и 2, которая не заикливается. Докажите, что она действительно не заикливается.

10 Арина упражняется в счете, выписывая очень длинную последовательность цифр. Первые две цифры ей написал Олег, а каждая следующая цифра в последовательности равна последней цифре суммы двух предыдущих (например, после $\dots, 7, 9$ она пишет 6 — последнюю цифру $7 + 9 = 16$). Докажите, что эта последовательность рано или поздно заиклится.

11 (Игра в перестройку) Несколько человек встают в ряд у доски. На доске пишется правило, по которому надо перестраиваться. (Например, $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, \dots$) Люди перестраиваются по этому правилу. Потом опять перестраиваются по этому правилу, и так далее. Оказывается, в какой-то момент они обязательно встанут в исходном порядке. Почему?

12 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы. Участник соревнований по городскому ориентированию стартовал на площади Революции и ходит по улицам, на каждой

площади сворачивая поочередно то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он вернется на площадь Революции.

13 Выписали все натуральные числа от 1 до 999. Каких среди них больше: с суммой цифр 17 или с суммой цифр 10?

14 В 7М классе N человек. Олег пишет всевозможные списки из нескольких учеников класса (в списке может не быть ни одного человека или, наоборот, быть все N человек). Каких списков больше: с четным или с нечетным числом учеников?

15 В ряд выложено шесть шариков. У Маши есть краски четырех цветов: желтого, красного, синего и зеленого. Сколькими способами Маша сможет раскрасить эти шарики, если сестренка Леночка просит, чтобы хотя бы один шарик был желтенький?

16 Художник написал четыре пейзажа, пять натюрмортов и два портрета. Сколькими способами можно выбрать несколько его картин для выставки так, чтобы среди выбранных был и пейзаж, и натюрморт, и портрет?

17 На математический кружок ходят 10 человек. Сколько можно из них составить разных команд для участия:

a в математической регате (4 человека); **b** в математическом бое (6 человек)?

Вычислите числовые ответы и объясните, почему они получились одинаковыми.

18 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в словах
a АНАНАС; **b** МАТЕМАТИКА **c** ПАМПАРАМПАМПАМ?

19 **a** На карусели 6 одинаковых сидений. Сколькими способами можно их покрасить в 6 разных цветов?

b Есть 6 разных бусин. Сколько различных ожерелий можно из них собрать?

20 **a** В классе учатся 10 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно разбить их на пары мальчик-девочка?

b А сколькими способами этот класс можно разбить на какие угодно пары?

21 У скольких семизначных чисел все цифры различны, а в каждой паре соседних цифр меньше та, которая дальше от края?

22 Певица приехала в город на две недели. Сколькими способами она может так выбрать три вечера для концерта, чтобы не петь два вечера подряд?

23 Сколькими способами можно поставить крестики и нолики в клетки доски 8×8 так, чтобы в каждом квадратике 2×2 было чётное число крестиков?