

# 7М, спецкурс, занятие 1

3 сентября 2022

## Делимость

Все числа в этом листочке считаются целыми.

**1** **a** Маша посмотрела на написанное на доске число и сказала, что оно делится на 2, на 3, на 4 и на 24. Учительница сказала, что Маша ровно один раз ошиблась. Где ошиблась Маша?

**b** Маша посмотрела на написанное на доске число и сказала, что оно делится на 4, на 12, на 18 и на 36. Учительница сказала, что Маша ровно один раз ошиблась. Кто на самом деле ровно один раз ошибся?

**Определение.** Число  $a$  делится на число  $b$  (обозначается  $a : b$ ), если существует такое число  $c$ , что  $a = b \cdot c$ .

**2** Проверьте, делится ли

**a**  $-15$  на  $15$ ;

**b**  $-10$  на  $-2$ ;

**c**  $27$  на  $-2$ ;

**d**  $0$  на  $0$ .

**3** Докажите:

**a** Если  $a : b$ , то  $(a + b) : b$ ,  $(a - b) : b$

**b** Если  $a : b$  и  $b : c$ , то  $a : c$

**c**  $a : b$  и  $b : a$ , то либо  $a = b$ , либо  $a = -b$

**4** Даны целые числа  $a$  и  $b$ . Известно, что:

**a**  $a + 1$  делится на 3. Докажите, что  $4 + 7a$  делится на 3.

**b**  $2 + a$  и  $35 - b$  делятся на 11. Докажите, что  $a + b$  делится на 11.

**c**  $3a + 7b$  делится на 19. Докажите, что  $41a + 83b$  делится на 19.

**5** Докажите, или опровергните для целых  $a, x, y$  следующие утверждения.

**a** из  $y : a$  следует  $xy : a$ ;

**b** из  $x : a$  и  $y : a$  следует  $(x + y) : a$ ;

**c**  $x : y$  равносильно  $ax : ay$ .

**6** Может ли сумма трёх различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?

**7<sup>v</sup>** Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $56 \cdot a = 65 \cdot b$ . Докажите, что число  $a + b$  составное.

**8** Перед боем с белогвардейцами у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Докажите, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

**9** В вершинах квадрата стоят натуральные числа. На каждой стороне написали произведение чисел в вершинах. Сумма четырех написанных произведений равна 77. Докажите, что сумма каких-то двух из исходных чисел делится на 7.

## Задачи на шоколадку

**1★** Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа написать натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных  $m, n > 100$  сумма чисел в любом прямоугольнике  $m \times n$  клеток делилась на  $m + n$ ?

**2★** Для каких  $n$  существует такая замкнутая несамопересекающаяся ломаная из  $n$  звеньев, что каждая прямая, содержащая одно из звеньев этой ломаной, содержит ещё хотя бы одно её звено?