

7М, спецкурс, занятие 1

3 сентября 2022

Делимость

Все числа в этом листочке считаются целыми.

1 **a** Маша посмотрела на написанное на доске число и сказала, что оно делится на 2, на 3, на 4 и на 24. Учительница сказала, что Маша ровно один раз ошиблась. Где ошиблась Маша?

b Маша посмотрела на написанное на доске число и сказала, что оно делится на 4, на 12, на 18 и на 36. Учительница сказала, что Маша ровно один раз ошиблась. Кто на самом деле ровно один раз ошибся?

Определение. Число a делится на число b (обозначается $a : b$), если существует такое число c , что $a = b \cdot c$.

2 Проверьте, делится ли

a -15 на 15 ;

b -10 на -2 ;

c 27 на -2 ;

d 0 на 0 .

3 Докажите:

a Если $a : b$, то $(a + b) : b$, $(a - b) : b$

b Если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$

c $a : b$ и $b : a$, то либо $a = b$, либо $a = -b$

4 Даны целые числа a и b . Известно, что:

a $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.

b $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

c $3a + 7b$ делится на 19. Докажите, что $41a + 83b$ делится на 19.

5 Докажите, или опровергните для целых a, x, y следующие утверждения.

a из $y : a$ следует $xy : a$;

b из $x : a$ и $y : a$ следует $(x + y) : a$;

c $x : y$ равносильно $ax : ay$.

6 Может ли сумма трёх различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?

7^v Натуральные числа a и b таковы, что $56 \cdot a = 65 \cdot b$. Докажите, что число $a + b$ составное.

8 Перед боем с белогвардейцами у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Докажите, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

9 В вершинах квадрата стоят натуральные числа. На каждой стороне написали произведение чисел в вершинах. Сумма четырех написанных произведений равна 77. Докажите, что сумма каких-то двух из исходных чисел делится на 7.

Задачи на шоколадку

1★ Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа написать натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных $m, n > 100$ сумма чисел в любом прямоугольнике $m \times n$ клеток делилась на $m + n$?

2★ Для каких n существует такая замкнутая несамопересекающаяся ломаная из n звеньев, что каждая прямая, содержащая одно из звеньев этой ломаной, содержит ещё хотя бы одно её звено?