

7 октября 2023. Страта В.
Занятие 5. Сумма и среднее арифметическое.

Своих учителей умел я радовать,
На муки шёл, науки грыз гранит.
Но никогда не понимал, где складывать,
Где вычитанье делать надлежит.

А. П. Межиров

Разбор

-1 [№9 с прошлого занятия]

Докажите, что из любых n целых чисел можно выбрать одно или несколько с суммой, кратной n .

Давайте складывать наши числа, прибавляя по одному на каждом шаге, и смотреть на остаток от деления на n получившейся суммы. Если какой-то остаток повторился, то сумма прибавленных с тех пор чисел делится на n , а если не повторялся, то среди n разных остатков обязательно будет 0.

Напоминание: средним арифметическим нескольких чисел называется их сумма, делённая на их количество.

0 Могут ли все числа в некотором наборе быть меньше их среднего арифметического? А больше?

А теперь сами:

1 Одного из учеников вертикали перевели в матстрату, отчего средний рост учеников в обеих группах увеличился. Могло ли так быть?

2 В бригаде 7 человек, их суммарный возраст 332 года. Докажите, что

a найдётся человек, которому хотя бы 48 лет;

b найдутся два человека, сумма возрастов которых хотя бы 95;

c найдутся три человека, сумма возрастов которых не менее 143.

3 Четверо школьников заметили, что если они сложатся без Андрея, то соберут 900 р., без Влада — 850 р., без Даши — 800 р., без Оли — 750 р. Сколько у кого денег?

4 Аня, Боря, Вика и Гена дежурят в течение 20 дней в школе. Известно, что каждый день дежурят ровно трое из них. Аня дежурила 15 раз, Боря 14 раз, Вика 18 раз. Сколько раз дежурил Гена?

5 На доске написано несколько ненулевых чисел. Каждое из них равно полусумме остальных. Сколько чисел на доске?

6 Даны три числа a , b , c . Известно, что среднее арифметическое чисел a и b на 5 больше среднего арифметического всех трёх чисел. А среднее арифметическое чисел a и c на 8 меньше среднего арифметического всех трёх чисел. На сколько среднее арифметическое чисел b и c отличается от среднего арифметического всех трёх чисел?

7 Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные в сумме во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач.