

30 сентября 2023. Страта В.
Занятие 4. Делится или нет?

- ... А что бы вы со своей стороны могли предложить?
– Да что тут предлагать?.. А то пишут, пишут... <...>
Голова пухнет. Взять всё, да и поделить.

М. А. Булгаков, «Собачье сердце»

Разбор

0 [задача №7b с прошлого занятия]

Докажите, что для любого N найдётся N идущих подряд составных чисел.

Для небольших N примеры легко отыскать. А чтобы решить задачу в общем виде, надо вспомнить, что такое факториал. Поскольку $N!$ гарантированно делится на все числа от 1 до N , прибавляя к нему 2, 3, 4 etc., мы получим заведомо составные числа. Но от 2 до N только $N - 1$ число, значит, нам нужен $(N + 1)! = Q$, а искомыми числами будут $Q + 2, Q + 3, \dots, Q + N + 1$.

А теперь сами:

1 Найдите все такие простые числа p , что $5p + 1$ — простое.

2 **a** Про некоторое целое число сказали следующее: «оно делится на 15», «оно делится на 25», «оно делится на 33», «оно делится на 55», «оно делится на 165». Известно, что четыре утверждения верны, а одно — нет. Какое?

b Соня посмотрела на написанное на доске число и сказала, что оно делится на 4, на 12, на 18 и на 36. Учительница сказала, что Маша ровно один раз ошиблась. Кто на самом деле ровно один раз ошибся?

3 Андрей, Петя и Влад решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они условились, что за каждую решённую задачу решивший её первым получает 4 конфеты, решивший вторым — две, а решивший третьим — одну. Ребята говорят, что каждый из них решил все задачи и получил 20 конфет, причём одновременных решений не было. Докажите, что они ошибаются.

4 Докажите, что

- a** произведение трёх последовательных чисел всегда делится на 6;
- b** произведение пяти последовательных чисел всегда делится на 30;
- c** произведение пяти последовательных чисел всегда делится на 120.

5 Докажите, что из 100 любых натуральных чисел можно выбрать не менее 99 так, чтобы их сумма была составным числом.

6 Придумайте:

- a** 3 различных числа, сумма которых делится на каждое из них;
- b** 4 различных числа, сумма которых делится на каждое из них;
- c** 10 различных чисел, сумма которых делится на каждое из них.