7 класс, геометрия. Девятая неделя, 24 – 29 октября.

Определение. Пусть M — середина $[AB]$, $M \in m$, $m \perp AB$. Тогда говорят, что m — ***серединный перпендикуляр*** к $[AB]$. Иногда сокращённо пишут "сер. пер." Это породило в устной речи слово "серпéр", оно немного вульгарное, но в народе прижилось :)

Серединный перпендикуляр к основанию равнобедренного треугольника – это его высота. У равнобедренной трапеции серединные перпендикуляры к основаниям совпадают (потому что биссектрисы вертикальных углов составляют одну прямую).

Очевидно, что если точка X лежит на m, то $XA = XB$ (потому что $\triangle XMA \stackrel{I}{=} \triangle XMB$). И наоборот, если $XA = XB$, то треугольник AXB равнобедренный, а у него XM – медана и высота, то есть сер. пер. к $[AB]$. Итак, точки, равноудалённые от концов отрезка, в точности составляют серединный перпендикуляр к нему. Говорят, что серединный перпендикуляр к отрезку – ***геометрическое место*** точек плоскости, равноудалённых от концов отрезка.

Как известно, у равнобедреннного треугольника углы при основании равны (это одно из его ***свойств***). Оказывается, верно и обратное: если у какого-то треугольника два угла равны, то он равнобедренный. Это — один из ***признаков*** равнобедренного треугольника.

Задача (важная). Докажите, что если в треугольнике ABC $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$.

Первое решение. Отметим середину M отрезка $[AC]$ и построим серединный перпендикуляр к нему. Если он проходит через B, то треугольники AMB и CMB равны по первому признаку, и $AB = BC$. Если нет, то он пересекает одну из сторон, допустим AB, в точке K. Тогда треугольники AMK и CMK равны по первому признаку, и $\angle MCK = \angle MAK$. Но и $\angle MCB = \angle MAK$ по условию, то есть лучи $[CK)$ и $[CB)$ совпадают, а мы предположили, что это не так. Противоречие.

Обратите внимание на глубокую идею этого рассуждения — чтобы доказать, что данная фигура является ТАКОЙ, мы строим «рядом с ней» настоящую ТАКУЮ фигуру, и видим, что «расхождения» между ними быть не может.

Второе решение. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$. Проведём биссектрисы AA_1 и CC_1. Треугольники ACC_1 и CAA_1 равны по второму признаку — у них общая сторона, к которой прилегают углы, равные α и 2α. Тогда $\angle AC_1C = \angle CA_1A$ и $CC_1 = AA_1$. Заметим, что $\angle CC_1B = \angle AA_1B$ как смежные с равными. И теперь треугольники BCC_1 и BAA_1 равны по второму признаку, откуда $AB = BC$.

Третье решение. $\triangle ABC \stackrel{II}{=} \triangle CBA$, поэтому $AB = CB$.

Решение поначалу кажется каким-то надувательством, но оно совершенно правильное, к нему не придерёшься! Равенство треугольника "самому себе" в этом рассуждении довольно глубокое. Мы как бы вырезаем треугольник из бумаги, переворачиваем на другую сторону и вкладываем в ту же дырку :)

Давайте назовём ещё свойства равнобедренных треугольников и подумаем, можно ли их превратить в признаки. Мы знаем, что у равнобедренного треугольника медиана, биссектриса и высота попарно совпадают. Можно ли это превратить а признаки?

Задача (важная). Докажите, что если высота AH треугольника ABC является его биссектрисой или медианой, то $AB = BC$.

А вот что делать, если биссектриса является медианой, неясно, потому что признака "по двум сторонам и углу **НЕ** между ними" у нас не было. Более того, такого признака и быть не может. Потому что

Задача (важная). Приведите пример двух неравных треугольников, у которых, тем не менее соответственно равны две стороны и угол. Решение. Отметим середину M отрезка $[BB_1]$ и построим серединный перпендикуляр к нему, на перпендикуляре отметим точку A. Далее на луче $[BB_1)$, но не на отрезке $[BB_1]$ отметим точку C. Треугольники ACB и ACB_1 искомые.

Но не унывайте — есть другой отличный признак равенства треугольников!

Третий признак равенства треугольников: Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны. Равенство треугольников, доказанное по этому признаку, принято обозначать римской цифрой III над знаком равенства.

Доказательство в отличие от двух первых признаков довольно сложное. Пусть даны два треугольника, ABC и $A'B'C'$, соответствующие стороны которых равны. От луча $[A'B')$ в ту полуплоскость, где лежит C', по аксиоме можно отложить единственный треугольник, равный ABC. Сделаем это и получим треугольник $A'B'C_2$. На самом деле $C_2 = C'$, что нам и нужно, но пусть не так и $C_2 \neq C'$. Заметим, что $C_2A' = A'C'$, поэтому треугольник $C_2A'C'$ равнобедренный, и A' лежит на серединном перпендикуляре к $[C_2C']$. Аналогично треугольник $C_2B'C'$ равнобедренный, и B' тоже лежит на серединном перпендикуляре к $[C_2C']$. Но это значит, что прямая $(A'B')$ — это и есть тот самый серединный перпендикуляр! Однако это явная чушь — эта прямая вообще не пересекает отрезок $[C_2C']$, так C_2 и C' лежат по одну сторону от неё. А должна пересекать, да ещё в середине, да ещё под прямым углом. Получили противоречие.