7 класс, геометрия. Восьмая неделя, 10 – 15 октября.

В задаче №1 самостоятельной работы нам встретился примечательный четырёхугольник, изучим его подробнее.

Определение. Четырёхугольник, диагонали которого равны и одинаково (но не поровну) делятся точкой их пересечения, называется ***равнобедренной трапецией***.

Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AC \cap BD = O$, $AO = OD$ и $BO = OC$. Тогда стороны BC и AD — ***основания трапеции*** (отметим, что $AD \neq BC$), а стороны AB и CD — её ***боковые стороны***.

Мы доказали в самостоятельной работе, что боковые стороны равнобедренной трапеции равны (что и подчёркивает её название). И ещё то, что у равнобедренной трапеции равны углы, прилежащие к основаниям.

На самом деле равнобедренная трапеция нам встретилась ещё в домашнем задании – в задаче №5. Докажем это.

Итак, из точек A и B, лежащих по одну сторону от прямой m на эту прямую опущены перпендикуляры AM и BN. (Дополнительно предположим, что эти перпендикуляры разной длины.) Точки A_1 и B_1 выбраны так, что M – середина $[AA_1]$ и N – середина $[BB_1]$. Докажем, что ABB_1A_1 – равнобедренная трапеция.

По отношению к отрезкам $[AA_1]$ и $[BB_1]$ прямая m называется серединным перпендикуляром. Запишем определение:

Определение. Прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему, называется ***серединным перпендикуляром*** к этому отрезку.

Мы отвлеклись, вернёмся к доказательству.

Нам надо доказать, что её диагонали равны и делятся точкой пересечения одинаково. Интуиция подсказывает, что точка пересечения будет лежать на прямой m, поэтому поступим так. Пусть $O = m \cap (A_1B)$. Соединим O с A и B_1. Нам нужно доказать, что $AO = A_1O$, $AO = A_1O$ и то, что AOB_1 – одна прямая.

Равенство $AO = A_1O$ следует из равенства $\triangle AOM \overset{I}{=} \triangle A_1OM$ (I), равенство $BO = B_1O$ аналогично. Из того же равенства следует $\angle AOM = \angle A_1OM$ (а из аналогичного $\angle BON = \angle B_1ON$. Кроме того, $\angle A_1OM = \angle BON$, так что $\angle AOM = \angle B_1ON$. По теореме, обратной теореме о вертикальных углах, A, O, B_1 составляют одну прямую, и это завершает доказательство.

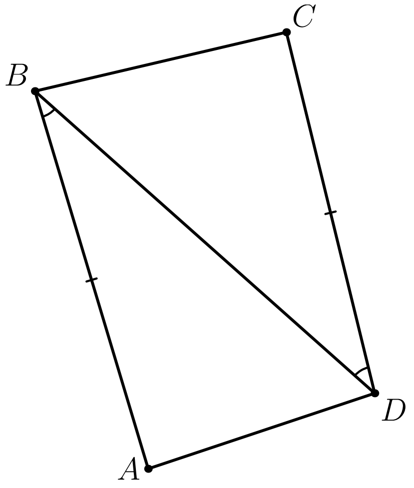
Мы доказали, что четырёхугольник, у которого две противоположные стороны имеют общий серединный перпендикуляр, является равнобедренной трапецией. Нетрудно доказать и обратное – у равнобедренной трапеции серединный перпендикуляр к обоим основаниям – одна и та же прямая. В самом деле, это следует из того, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

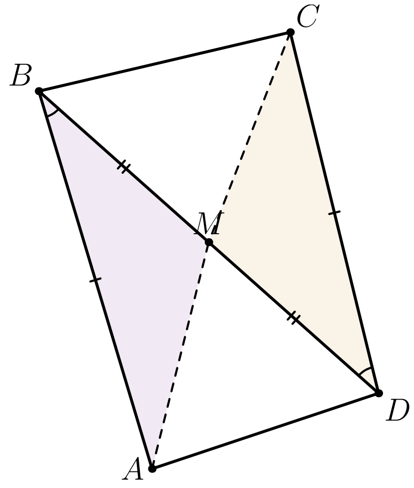
Осевая или зеркальная симметрия (продление перпендикуляра на свою длину) помогает и при доказательстве единственности перпендикуляра из точки к прямой. Мы на прошлом уроке доказали существование перпендикуляра, теперь докажем единственность.

Пусть из точки C на прямую (AB) удалось провести два перпендикуляра – CH и CG. Отложим на $[CH)$ такую точку C_1, что $CC_1 = 2 \cdot CH$ Часто говорят так: «продлим CH на свою длину».. Тогда треугольники CHG и C_1HG равны по первому признаку, и $\angle C_1GH = \angle CGH = 90°$, то есть C, G и C_1 лежат на одной прямой, но через C и C_1 не может проходить две прямые — противоречие.

Вот задачи из домашнего задания.

$\boxed{6.}$ В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $\angle ABD = \angle CDB$ (рис. слева). Докажите, что это параллелограмм.



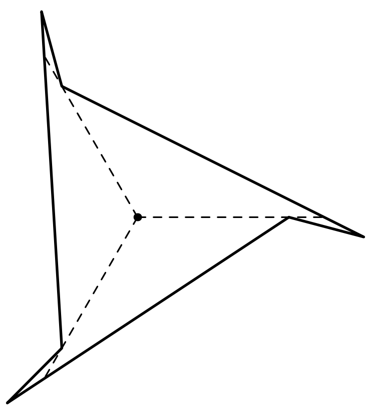


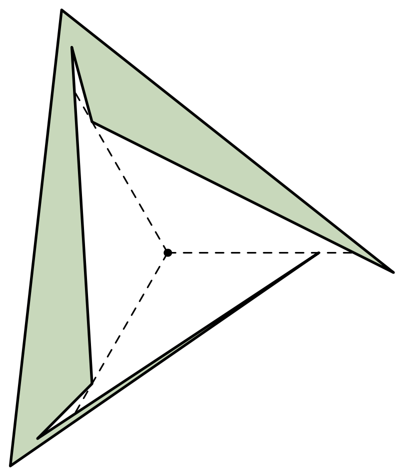
Коварная задача. Хочется начать с равенства треугольников $\triangle ABD \overset{I}{=} \triangle CDB$, удаётся доказать немало, но это путь в никуда. Вместо этого (рис. справа) отметим точку M – середину BD. Из $\triangle ABM \overset{I}{=} \triangle CDM$, получим $AM = MC$ и $\angle AMB = \angle CMD$, что по теореме, обратной теореме о вертикальных углах, означает, что A, M и C на одной прямой. Поэтому AC и BD – диагонали, O – их общая середина. То есть, $ABCD$ – действительно параллелограмм.

И две последние задачи:

$\boxed{7.}$ Начертите шестиугольник и отметьте точку внутри него так, чтобы из неё не была бы видна полностью ни одна его сторона.

$\boxed{8.}$ Начертите восьмиугольник и отметьте точку снаружи от него так, чтобы из неё не была бы видна полностью ни одна его сторона.





Второй признак равенства треугольников: Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны. Равенство треугольников, доказанное по этому признаку, принято обозначать римской цифрой II над знаком равенства.

Задача. Диагональ AC четырёхугольника $ABCD$ является биссектрисой обоих его углов — $\angle A$ и $\angle C$. Докажите, что $AB = AD$, $BC = DC$ и $\angle B = \angle C$.

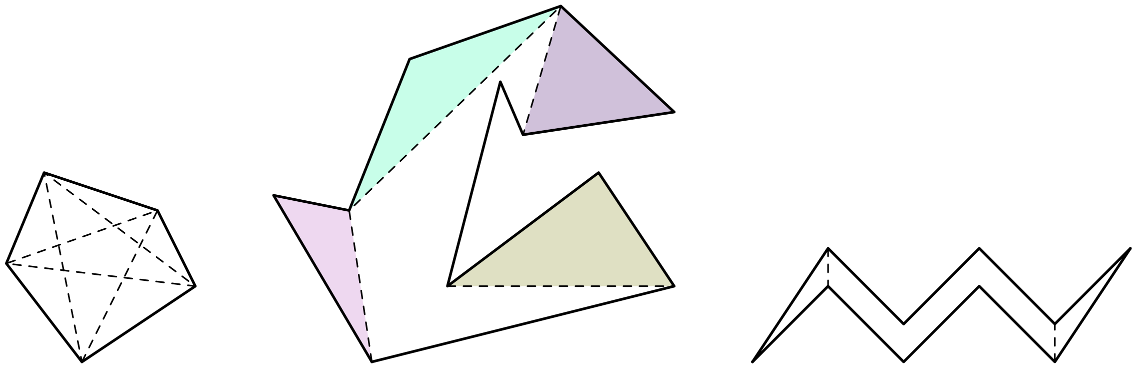
Четырёхугольник, у которого диагональ является биссектрисой обоих его углов, вершины которых соединяет, называется ***дельтоидом.*** В англоязычной литературе иногда употребляется короткое и образное слово `"kite"`. Мы доказали некоторое свойство дельтоида. Сейчас докажем еще одно.

Задача. Докажите, что диагонали дельтоида перпендикулярны, причём одна из них делится другой диагональю (её продолжением) пополам.

В заключение, раз осталось время, ещё немного поговорим о диагоналях, проходящих внутри многоугольника. Мы доказали на прошлом уроке, что у всякого многоугольника найдётся диагональ, лежащая внутри него. Оказывается, можно доказать более сильное утверждение:

Теорема. У всякого n-угольника ($n > 3$) найдётся диагональ, лежащая внутри него и соединяющая две его вершины, идущие через одну.

Иными словами, найдутся три идущие подряд вершины, скажем, A, B и C такие, что диагональ AC целиком лежит внутри него. Треугольник ABC, который отсекает от многоугольника эта диагональ, иногда в шутку называют "ухом", а проводя такую диагональ, говорят "отрежем ухо":)



В выпуклом n-угольнике (пример слева) любая малая диагональ отрезает ухо, у него n ушей. В невыпуклом – не любая, на примере в центре закрашены некотоые уши (не все, там есть ещё три, но мы для наглядности закрасили несколько так, чтобы они не накладывались друг на друга). Пример справа показывает, что даже при достаточно большом n у n-угольника может быть всего два уха. Но два уха будет обязательно! Мы потом докажем это.