7 класс, геометрия. Седьмая неделя, 10 – 15 октября.

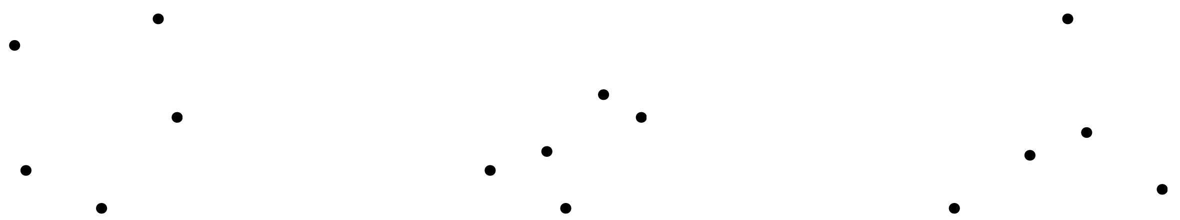
Задачи о выпуклости фигур очень интересные и местами сложные. Расскажем одну из них.

Задача со счастливым концом (Эстер Кляйн, 1930 г.)

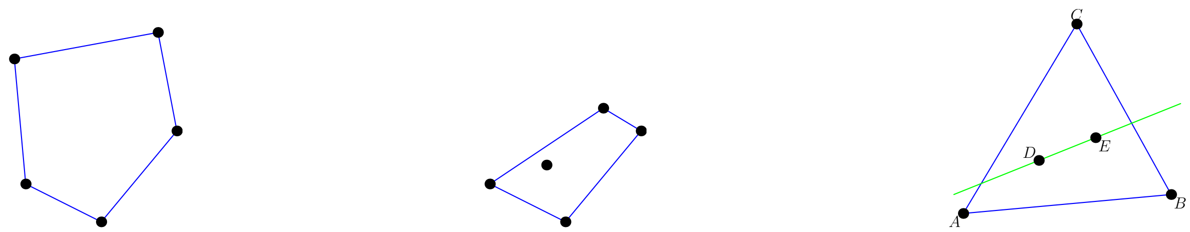
На плоскости даны пять точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Доказать, что можно выбрать четыре из них, являющиеся вершинами выпуклого четырёхугольника.

Задачу придумала Эстер Кляйн (*Esther Klein*, 1910 – 2005), 20-летняя студентка Будапештского университета. Вместе с близкими друзьями и однокурсниками Палом Эрдёшем (*Paule Erdös*, 1913 – 1996) и Дьердем Секерешем (*George Szekeres*, 1911 – 2005) они решили задачу и работали над её обобщениями.

Решение задачи красивое и остроумное. Можно заметить, что точки могут быть расположены очень удачно (для выбора выпуклого четырёхугольника) – рисунок слева, расположение может быть, так сказать, средней удачности (в центре) и совсем неудачным (справа).

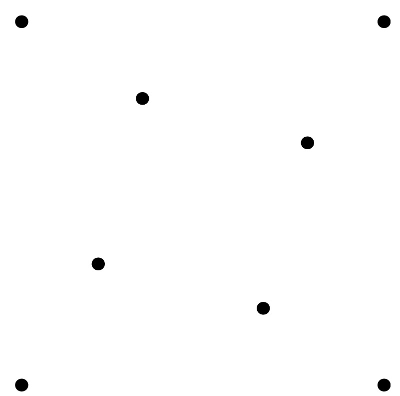


Как описать различие между этими вариантами? Представим себе, что точки – гвоздики, вбитые в плоскость. Возьмём большую круглую голубую резинку, окружим ею все точки-гвоздики и отпустим. Как она будет выглядеть? Как выпуклый пяти- четырёх- или треугольник. То, что охватит резинка, называют *выпуклой оболочкой* системы точек.



В первых двух случаях выбрать выпуклый четырёхугольник несложно. Если же выпуклая оболочка – треугольник ABC, рассмотри прямую DE. По аксиоме Паша, она не пересечёт одну из сторон (скажем, AB), тогда точки A, B, D, E нас устроят.

У этой задачи много обобщений. Например, мы понимаем, что минимальное количество случайно взятых точек, такое, что из них с гарантией можно было бы выбрать выпуклый четырёхугольник, равно пяти – четырёх, очевидно, не хватит. А сколько по минимуму точек нужно, чтобы можно, не видя точек, быть уверенным, что найдётся выпуклый пятиугольник? Оказывается, девять. Доказать это довольно непросто, а вот пример неудачного расположения восьми точек – убедитесь сами, что никакие пять из них не образуют выпуклого пятиугольника.



Сколько нужно точек, чтобы гарантировать наличие выпуклого n-угольника, никто не знает, хотя задачей занимались и наши герои, и многие после них. Есть несколько оценок на это число. Есть предположение, что ответ $2^{n-2}+1$ (так называемая гипотеза Эрдёша-Секерёша), для $n=6$ ответ действительно 17, но точные значения для $n \geqslant 7$ неизвестны.

Можно, наоборот, спросить, какое число выпуклых четырёхугольников можно заведомо найти в любом наборе из n точек плоскости.

В ходе работы над обобщениями этой задачи Секерёш и Клейн очень сблизились, полюбили друг друга и впоследствии (в 1936 году) поженились (но общую задачу так и не решили:). Эрдёш в шутку назвал задачу, сыгравшую в жизни его друзей такую роль, «задачей со счастливым концом» (*happy-end problem*).

Тем временем к власти в Германии пришли нацисты, была аннексирована Австрия и часть Чехии, начались притеснения евреев, а затем и явные расправы над ними. В Венгрии тоже было неспокойно (в 1938 году Венгрия станет союзником Германии), и герои нашего рассказа (все они были евреями) были вынуждены покинуть Европу. Эрдёш уехал в Америку (и стал одним из крупнейших математиков XX века), а чета Секерёшей оказалась в Китае (в Шанхае), а потом, уже в 60-е годы – в Аделаиде (Австралия). Там они жили и работали долгие годы, став также достаточно известными математиками. Они прожили очень долгую жизнь (около 95 лет) и умерли в один день, 28 августа 2005 года, с разницей в несколько минут. Если известную сказочную формулу "они жили долго и счастливо и умерли в один день" и можно отнести к реальным людям, то несомненно Эстер и Дьердь Секерёши в их числе.

А мы от этой сказки перейдём к многоугольникам, а точнее, в основном, к треугольникам.

Изучение многоугольников мы начинаем с треугольника. И будем заниматься треугольниками очень долго и подробно. Удивительно, но эта простейшая фигура обладает поразительным богатством свойств. О треугольниках доказаны сотни теорем, и люди постоянно открывают новые и новые.

Многоугольники называются ***равными***, если можно совместить все их соответствующие стороны и углы. Слову «совместить» мы пока не придаём точного смысла и понимаем как "вырезать из бумаги м наложить друг на друга". Очень важно слово «соответственный». Есть два n-угольника, $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$. Мы сначала произвольно полагаем, что A_1 соответствует B_i, далее A_2 будет соответствовать B_{i-1} или B_{i+1}, далее все соответствия однозначно задаются. При этом возникают соответственные стороны, углы, диагонали и так далее.

Для треугольников достаточно просто совместить вершины, для 4-угольников это уже не так, у нас была такая задача.

У равных многоугольников ***соответствующие углы равны, соответствующие стороны равны.***

Аксиома откладывания треугольника: от каждого луча можно отложить треугольник, равный данному: одна вершина в начале луча, вторая на луче, третья в заданной полуплоскости относительно луча. Единственность не постулируется -- почему?

Первый признак равенства треугольников: если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треуглника, то такие треугольники равны. Равенство треугольников, доказанное по этому признаку, принято обозначать римской цифрой I над знаком равенства.

Задача. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, являющейся серединой каждого из них. Докажите, что противоположные стороны и углы этого четырёхугольника равны.

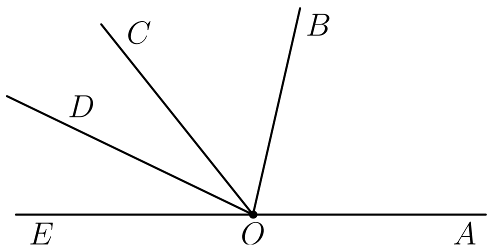
Этот четырёхугольник называется параллелограммом, потому что его противоположные стороны параллельны друг другу. Но докажем мы это позже. При этом хотелось бы рассматривать такие четырёхугольники, поэтому пойдём на хитрость – дадим *временное определение.*

Временное определение. Четырёхугольник, диагонали которого пересекаются в их общей середине, называется ***параллелограммом***.

Это определение эквивалентно классическому. Когда мы пройдём параллельность, мы «переопределим» параллелограмм, и тогда факт про диагонали станет просто его свойством (и признаком).

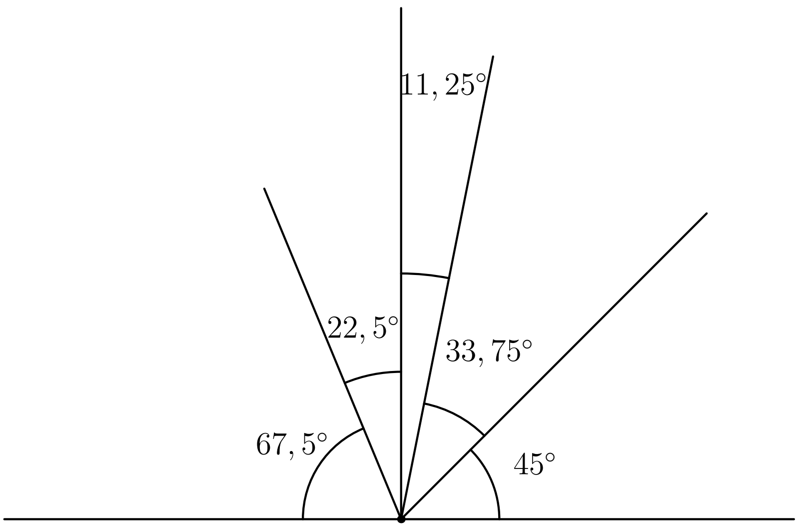
Разберём сложную задачу из домашнего задания.

$\boxed{8.}$ В самостоятельной работе, которую мы писали на прошлой неделе, развёрнутый угол был разделён тремя лучами на части так, что каждый луч является биссектрисой какого-то угла на чертеже.



Для удобства назовём *простыми углами* углы между соседними лучами (считая и углы со сторонами развёрнутого угла). Среди простых углов тут есть два равных ($\angle COD = \angle DOE$). И если проводить три луча, то избежать этого нельзя. Проведите, однако, из вершины развёрнутого угла **четыре** луча в одну полуплоскость так, чтобы все простые углы были различны, при этом каждый из лучей был биссектрисой какого-то угла на чертеже. Укажите на чертеже величины всех простых углов.

Пример на рисунке.



Можно доказать, что примеров только два – нарисованный и такой, в котором углы $33,75°$ и $11,25°$ поменяны местами. Ну и, конечно, каждый из двух примеров можно нарисовать и слева направо, и справа налево.

Задача (важная). На сторонах угла с вершиной B отметили точки A и C так, что $AB = BC$. Докажите, что отрезок $[BC]$ перпендикулярен биссектрисе угла. Докажите, что биссектриса угла делит $[BC]$ пополам. Докажите, что $\angle CAB = \angle BAC$.

Определение. Треугольник с двумя равными сторонами называется ***равнобедренным***. Эти стороны у него называют ***боковыми***, а третью сторону – ***основанием***. Основание традиционно располагают горизонтально, а сам треугольник в верхней полуплоскости от основания. Если говорят «вершина равнобедренного треугольника», не уточняя, какая именно, то это вершина, противолежащая основанию.

Только что мы доказали важные свойства равнобедренного треугольника. Сейчас узнаем, какие.

Определение. Отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до пересечения со стороной называется ***биссектрисой треугольника***. У треугольника три биссектрисы.

Определение. Отрезок, соединяющий вершину угла треугольника с серединой противолежащей стороны называется ***медианой треугольника***. У треугольника три медианы.

Определение. Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону, называется ***высотой треугольника***. Высотой иногда может считаться и весь перпендикуляр (прямая). У треугольника три высоты. Внимание — высота не обязана пересекать сторону треугольника!

Итак, только что мы доказали теорему: У равнобедренного треугольника углы при основании равны, а медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

Но тут нужно сделать замечание — мы пока не доказывали, что из точки вне прямой можно провести к этой прямой перпендикуляр. А то вдруг у каких-то треугольников высоты вообще нет! Сейчас как раз пора сделать это.

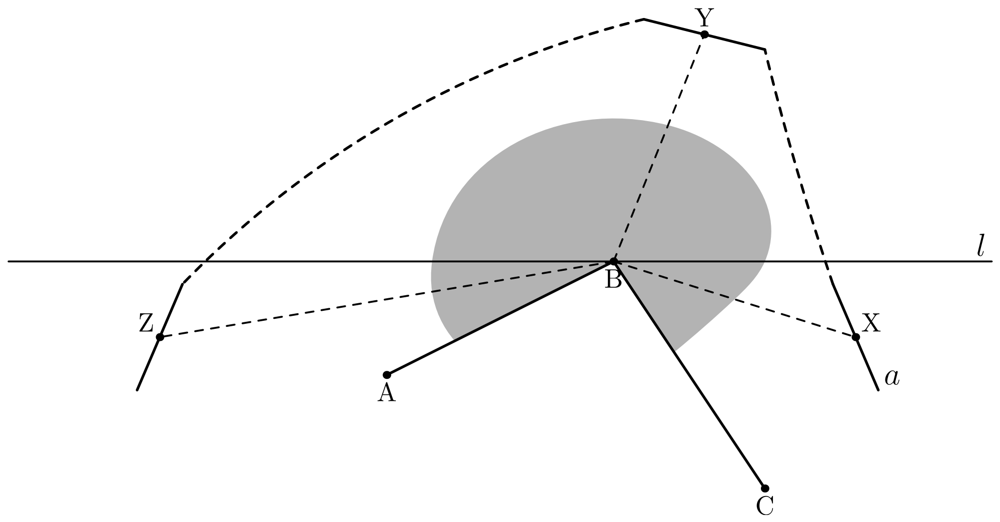
Теорема. $\forall (AB) \forall C \notin (AB) \exists! H \in (AB) : (CH) \perp (AB)$. Словами: из любой точки вне прямой можно провести к ней единственный перпендикуляр. Часто говорят «опустить перпендикуляр». Про точку H говорят «основание перпендикуляра».

Доказательство существования. Если $(AC) \perp (AB)$, то перпендикуляр найден. Если нет, отложим угол $\angle BAC$ от $[AB)$ в другую полуплоскость и на построенном луче отложим точку C_1 так, что $AC_1 = AC$. Тогда по решённой нами задаче (CC_1) искомая прямая, а $H = (CC_1) \cap (AB)$.

В дополнение к основному материалу, если остаётся время, будем рассказывать другие важные и интересные вещи. Докажем важную и довольно трудную теорему.

Теорема. В любом n-угольнике ($n > 3$) найдётся диагональ, лежащая полностью внутри него.

Доказательство. Для выпуклого многоугольника это очевидно. Пусть теперь в нашем многоугольнике $\angle ABC > 180°$. Начнём поворачивать луч против часовой стрелки от луча $[BC)$ к лучу $[BA)$. Всякий луч, кроме самих $[BC)$ и $[BA)$, сначала входит во внутреннюю область многоугольника, но через какое-то время выходит из него, значит пересекает его границу. Про ближайшую к началу луча точку T границы скажем так: «глядя вдоль этого луча, мы видим точку T». Проведём через B прямую l Так, чтобы A и C лежали в одной полуплоскости от неё. Немного повернув луч (но не дойдя до l), мы увидим точку X какой-то стороны a (см. рис.). Заметим, что мы не сможем во врмя всего поворота луча постоянно видеть сторону a. Ведь если бы это было так, мы бы увидели точку Y стороны a, когда луч пересечёт l, и точку Z стороны a, когда луч вторично перейдёт l. Но каждый из отрезков XY и YZ пересекает l, и если бы это были отрезки одной прямой (содержащей предполагаемую сторону), то эта прямая пересекала бы l дважды.



Значит, наступит момент, когда мы перестанем видеть сторону a и увидим точку N какой-то иной стороны. Очевидно, что N — вершина многоугольника, а BN — искомая диагональ.