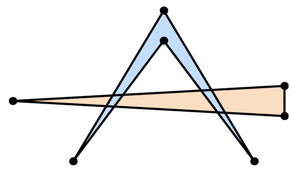
7 класс, геометрия. Шестая неделя, 03 – 08 октября.

Вот решение одной из домашних задач.

$\boxed{5.}$ Треугольник и четырёхугольник не имеют общих вершин. Какое максимальное число точек пересечения у них может быть?

Для начала скажем, что задача неудачно сформулирована. В этой формулировке ответ «бесконечно много». Имелось в виду "Треугольник и четырёхугольник расположены так, что никакие две из их семи сторон не лежат на одной прямой".



Вот пример на 8 точек. Больше не бывает, так как по аксиоме Паша прямая пересекает не более двух сторон треугольника, то есть каждая сторона четырёхугольника породит не более двух точек пересечения. Обратим внимание на то, что просто примера было бы недостаточно.

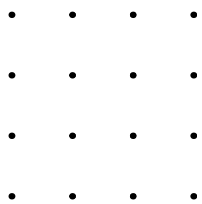
В задаче №6 встретилось понятие, которое мы формально ещё не определяли.

Определение. Отрезок, соединяющий вершины многоугольника и не являющийся его стороной, называется ***диагональю***.

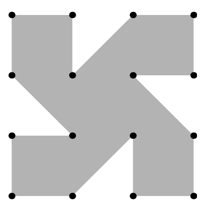
Упражнение. Нарисуйте многоугольник, чтобы одна из его диагоналей лежала целиком внутри него, другая — целиком вне, а ещё одна — частично вне и частично внутри.

Задача. Сколько диагоналей у n-угольника? `Ответ` $\frac{n(n-3)}{2}$. `Кстати, получается, что` $n(n-3)$ `всегда чётное число. Почему?`

Задача. Нарисуйте какой-нибудь 16-угольник с такими вершинами:



Решение. Как-то так:



Только что получился шестнадцатиугольник, но он невыпуклый — в нём есть «ямки», «вдавленности». Помните, мы ещё углы, большие 180° называли невыпуклыми. А что в точности значит слово «выпуклый»?

Попробуем формализовать понятие "выпуклый многоугольник". В дальнейшем будем иметь в виду плоский многоугольник.

Многоугольник называется ***выпуклым***, если…

Определение 1. …все его диагонали целиком лежат внутри него.

Определение 2. …все его внутренние углы меньше 180°.

Определение 3. ...он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Можно доказать, что эти определения эквивалентны, то есть если верно одно из них, то верны и все остальные. Доказательство не очень простое, и мы его пока давать не будем. Зато можем пользоваться любым определением, которое нам будет удобно.

А являются ли выпуклыми круг? окружность? овал? какая-нибудь сложная фигура наподобие очертаний России на карте? У них же нет сторон, углов и диагоналей! Зато есть общее определение выпуклости для любой фигуры.

Определение (общее) Фигура называется выпуклой, если вместе с любыми точками A и B целиком содержит отрезок $[AB]$. Можно сокращённо: F выпукла, если $\forall\ A,\ B \in F\ : [AB] \in F$.

Приведём примеры. Прямая, луч, отрезок – выпуклые. Окружность – невыпуклая. Карта России тоже (почему?). Полуплоскость – выпуклая фигура (почему?). Все треугольники выпуклые (почему). Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые. Очевидно, выпуклым будет круг, но как это доказать, пока неясно.

Задача. Разрежьте треугольник на три выпуклых четырёхугольника. `Резать из углов бесперспективно.`

Задача. Разрежьте квадрат на два невыпуклых шестиугольника.

В некоторых задачах удобно считать некоторые объекты «непрозрачными» и говорить «из точки A видно точку B» в том случае, если на $[AB]$ нет точек непрозрачных объектов.

Задача. Докажите, что выпуклый многоугольник виден полностью из любой своей внутренней точки. Это кажется очевидным, но для записи решения нужна некоторая культура. Пусть M -- внутренняя точка, X -- не видимая из неё точка границы. Тогда на $[MX]$ есть непрозрачные точки. Возьмём ближайшую к X. Если это точка стороны PQ, то точки M и X в разных полуплоскостях относительно (PQ), что нарушает второе доп. определение. Если это вершина, в которой сходятся стороны PQ и QR, то хотя бы одна из сторон не лежит на (MX), и дальше то же рассуждение про полуплоскости.

Задача. Докажите, что внутри непрозрачного невыпуклого многоугольника найдётся точка, из которой он виден не полностью.

Эти две задачи позволяют дать ещё одно определение выпуклости, правда, довольно неудобное для применения.

Задача. Укажите точку внутри невыпуклого четырёхугольника, из которой он виден полностью.

Оказывается даже внутри любого пятиугольника найдётся точка, откуда видно все его стороны. Вопрос связан с так называемой *задачей о художественной галерее.* Есть художественная галерея в форме n-угольника. Сколько минимально охранников нужно, чтобы охранять её? (Охранник стоит в одной точке, может поворачиваться и видит неограниченно далеко. Необходимо видеть все стены галереи.) Эта задача была поставлена Кли (Victor Clee) в 1973 г, решена довольно сложным способом, но несколькими годами позже нашли короткое и простое решение.

А вот вариант этой задачи (когда охраннику разрешено двигаться вдоль какой-то одной стены) пока никто из математиков решить не может. У вас есть шанс прославиться! ;)