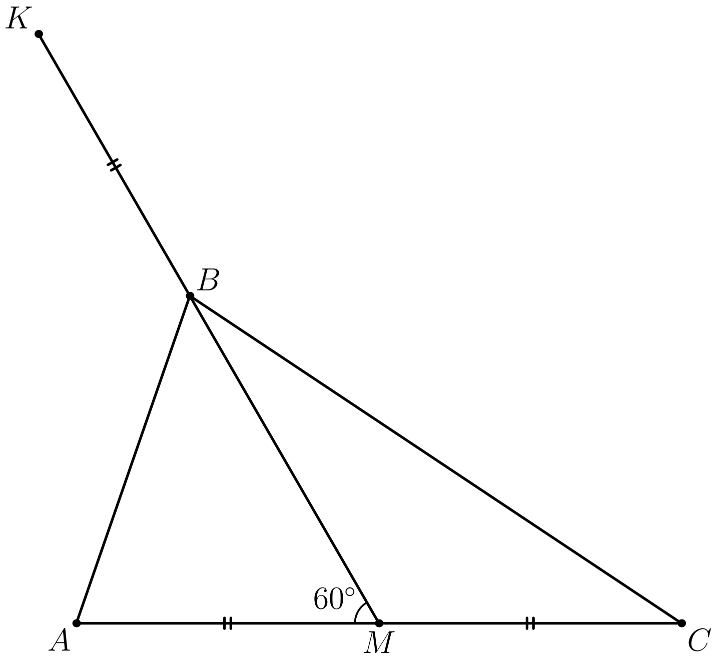
7 класс, геометрия, лето.
Восемь шагов к восьмому классу.

Это восемь задач, чтобы летом не скучать:) Решать строго по желанию, разумеется!

$\boxed{1.}$ В равностороннем треугольнике ABC проведена чевиана BN. Серединный перпендикуляр к ней пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что у треугольников APN и CNQ одни и те же углы.

Эту задачу решали наши 11-классники на ЕГЭ в этом году! Вероника, это твой брат решал! Оксана, и твой тоже! :)) Это, правда, только первый пункт, второй не для 7 класса, но тем не менее.

$\boxed{2.}$ Докажите, что $AK = BC$.

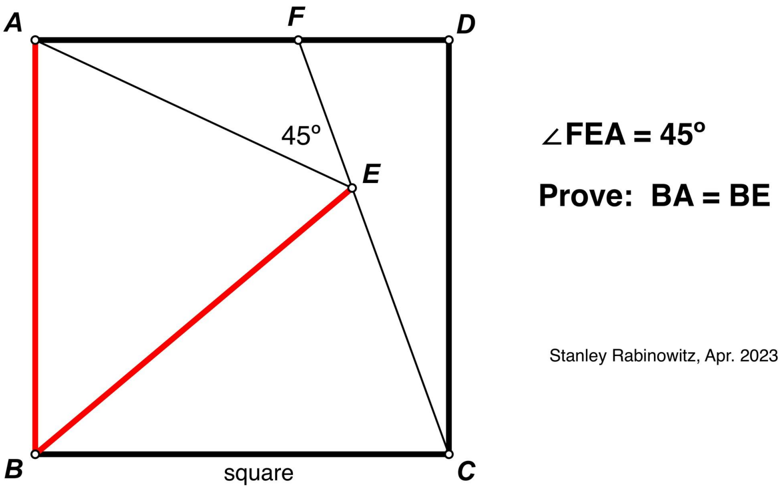


Украинская олимпиада по геометрии памяти Ясинского, ноябрь 2022 года. С ужасом и горьким стыдом представляю себе, в каких условиях она проходила.

$\boxed{3.}$ Внутри окружности отмечены две точки. Докажите, что существует окружность, на которой лежат эти точки и которая расположена строго внутри первой.

Олимпиада Швеции (Swedish Mathematical Competition), 1984 год. Вот что вы делали в 1984 году? :) А ваши родители?:)

4.

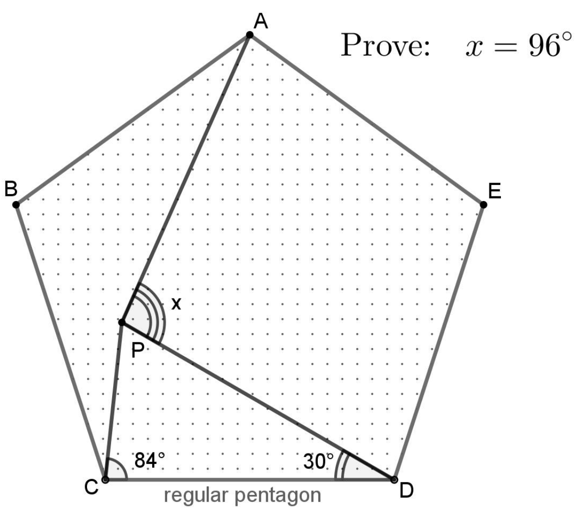


Задача американского математика Стэнли Рабиновича, опубликована в Фейсбуке, в группе с прекрасным названием «Romantics of Geometry» :) А решается она проще всего «методом Гриши»)

5. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ не является ни параллелограммом, ни трапецией. Точки A и C симметрично отразили относительно середины диагонали BD – получили точки A_1 и B_1. Аналогично, точки B и D симметрично отразили относительно середины диагонали AC – получили точки B_1 и D_1. Докажите, что из четырёх полученных точек одна лежит внутри $ABCD$, а остальные – снаружи.

Иранская геометрическая олимпиада (IGO), 2016 год. Иран, как и некоторые другие страны, склонные к авторитаризму и милитаризму, активно развивает математическое образование – стране нужны учёные, которые будут разрабатывать оружие. При этом иранская олимпиада очень интересная, там много красивых задач. Такая вот диалектика :(

6.



Задача из фейсбука Константина Кнопа, известного математика и автора олимпиадных задач, создателя геометрической игры «Euclidea». На всякий случай: «regular pentagon» – правильный пятиугольник.

$\boxed{7.}$ В выпуклом многоугольнике из каждой вершины опущены перпендикуляры на все не смежные с ней стороны. Может ли оказаться так, что основание каждого перпендикуляра попало на продолжение стороны, а не на саму сторону?

Олимпиада по геометрии имени Шарыгина, финал, 2013 год. Игорь Фёдорович Шарыгин (1937 – 2004) – выдающийся советский и российский геометр, автор множества книг и задач, многие преподаватели геометрии (и я в том числе) считают его своим Учителем. Кажется, Шарыгинская олимпиада – исторически первая школьная олимпиада по геометрии.

$\boxed{8.}$ В остроугольном треугольнике ABC отмечена точка O такая, что $OA = OB = OC$, а также проведена высота BH. Известно, что $\angle BCA - \angle BAC > 30^\circ$. Докажите что $\angle ABC + \angle COH < 90^\circ$.

Международная математическая олимпиада (IMO), 2001 год. Это, конечно большая редкость, что задача с межнара посильна семиклассникам, но я нашёл! :)) Дерзайте!