7 класс, геометрия. Тридцать первая неделя, 24 – 29 апреля.

Соотношение между радиусами и расстоянием между центрами. Если окружности $\omega_1(O_1\,;\,R_1)$ и $\omega_2(O_2\,;\,R_2)$ (обозначим $O_1O_2 = d$) пересекаются в точках A и B, то в треугольнике O_1AO_2 неравенство треугольника $R_1 + R_2 > d$, $R_1 + d > R_2$ $R_2 + d > R_2$. Отсюда получается $R_1 + R_2 > d > |R_2 - R_1|$. Можно доказать, что это условие является также и достаточным для того, чтобы окружности пересекались в двух точках.

Внешнее и внутреннее касание. Если окружности $\omega_1(O_1\,;\,R_1)$ и $\omega_2(O_2\,;\,R_2)$ (обозначим $O_1O_2 = d$) обладают свойством $R_1 + R_2 = d$ или $d = |R_2 - R_1|$, у них есть только одна общая точка. Можно доказать, что это условие является также и необходимым для того, чтобы окружности пересекались в одной точке. В первом случае говорят, что окружности ***касаются внешним образом***, во втором — что ***внутренним***.

Другие варианты. Если, наконец, $R_1 + R_2 < d$ или же $d < |R_2 - R_1|$, общих точек не будет. В первом случае говорят, что окружности ***лежат одна вне другой***, во втором — что ***лежат одна внутри другой***. Концентрические окружности, у которых $d = 0$ — частный случай второй из этих возможностей.

Разберём две непростые домашние задачи.

$\boxed{6.}$ На отрезке $[MK]$ взята точка L. Известно, что $AM > BM$ и $AK > BK$. Докажите, что $AL > BL$.

Пусть l — серединный перпендикуляр к $[AB]$. Он делит плоскость на две полуплоскости: та из них, что содержит точку B, — геометрическое место таких точек X, что $AX > BX$. По условию M и K лежат в этой полуплоскости, так что и L тоже (одна из аксиом полуплоскости).

$\boxed{7.}$ В выпуклом $ABCD$ $AC = BD$. Серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону CD. Докажите, что серединный перпендикуляр к CD пересекает сторону AB.

Пусть $AC = BD = 1$.

Фраза «серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону CD» в точности означает, что C ближе к B, чем к A, а D наоборот. Это можно записать так: $CB < 1$, $DA < 1$.

Тем же неравенствам равносильно и условие «серединный перпендикуляр к CD пересекает сторону AB», так что оно тоже верно.

В самостоятельной работе была конструкция с интересными свойствами. Из неё мы сделали задачу, которую решали в четверг. Вот эта задача:

$\boxed{4.}$ Серединный перпендикуляр к гипотенузе AB [неравнобедренного] прямоугольного треугольника ABC пересекается с биссектрисой его прямого угла в точке P. Докажите, что треугольник APB равнобедренный прямоугольный. *(Подсказка: опустите из P перпендикуляры на $[CA)$ и $[CB)$ и отыщите равные треугольники.)*

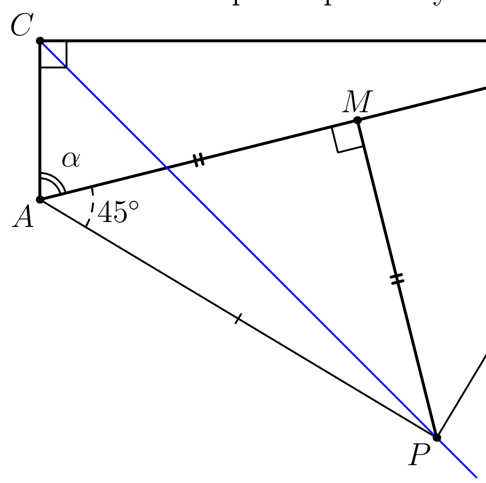
С подсказкой решить не очень сложно, но возникает проблема – обязательно оказывается, что один перпендикуляр падает на катет, а другой – на его продолжение. Поймём, почему так происходит.

Поступим хитро. Отложим на серединном перпендикуляре к гипотенузе AB прямоугольного неравнобедренного треугольника ABC точку P' так, что P' и C по разные стороны от (AB) и $AM = MP' = MB$ (M — середина гипотенузы).

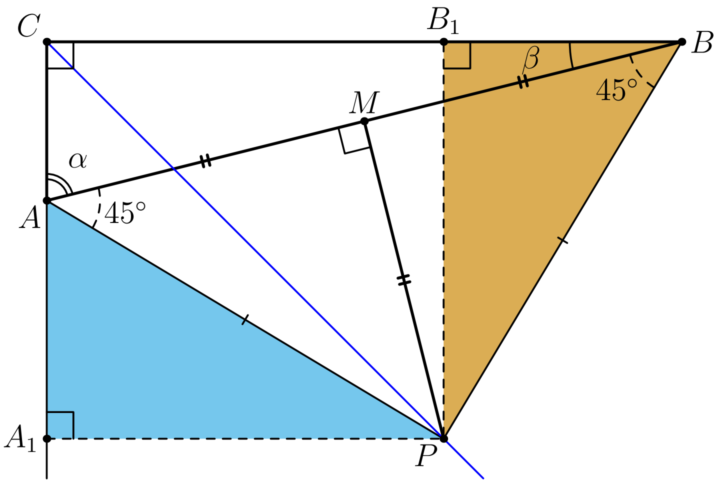
Очевидно, что треугольник $AP'B$ прямоугольный равнобедренный и такая точка единственна. Если мы докажем, что она лежит на биссектрисе прямого угла, мы получим, что P' совпадает с P, а значит и треугольник APB прямоугольнй равнобедренный. Это метод обратного хода; некоторые также любят называть его «метод Гриши».

Для простоты не будем писать P', сразу обозначим новую точку буквой P.

Задача. Докажите, что CP — биссектриса прямого угла $\angle ACB$.



Решение. Пусть $\angle A = \alpha > \angle B = \beta$. Чтобы доказать требуемое, опустим из P перпендикуляры PA_1 и PB_1 на лучи $[PA)$ и $[PB)$ соответственно. Нам нужно убедиться, что $PA_1 = PB_1$.



Заметим, что $\alpha > \beta$ и $\alpha + \beta = 90^\circ$. Это означает, что $\alpha > 45^\circ > \beta$. Поэтому $\beta + 45^\circ$ — острый угол, и B_1 будет на катете, а $\alpha + 45^\circ$ — тупой угол, и A_1 будет на продолжении катета.

Также заметим, что $\angle A_1AP = 180^\circ - \alpha - 45^\circ = \beta + 45^\circ$, так что треугольники PA_1A и PB_1B равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда и следует, что $PA_1 = PB_1$.