# 7 класс, геометрия. Двадцать девятая и тридцатая недели, 03 – 08 и 17 – 22 апреля.

Решим две важные задачи.

Дан треугольник $ABC$. Докажите, что серединные перпендикуляры к его сторонам $AB$ и $CB$ не могут быть параллельными. Пусть они пересекаются в точке $O$. Докажите, что $OA = OC$. Выведите отсюда, что ***серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке***.

Дан треугольник $ABC$. Пусть биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle C$ пересекаются в точке $I$. Докажите, что расстояния от $I$ до сторон $\angle B$ равны. Выведите отсюда, что ***биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке***.

Доказательство этих важных теорем проходит по одной и той же схеме.

Пусть серединные перпендикуляры к сторонам $AB$ и $A$ пересекаются в какой-то точке. Она равноудалена от вершин $A$ и $B$, так как лежит на первом серпере и равноудалена от вершин $A$ и , так как лежит на втором. Получается, что она равноудалена от вершин  и $B$, а тогда лежит на третьем серпере: ведь серединный перпендикуляр к $BC$ — геометрическое место именно таких точек.

Пусть биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекаются в некоторой точке. Она равноудалена от сторон $AB$ и $A$, так как лежит на первой биссектрисе сторон $AB$ и $BC$, так как лежит на второй. Получается, что она равноудалена от сторон $A$ и $B$, а тогда лежит на третьей биссектрисе: ведь биссектриса угла $C$ — геометрическое место именно таких точек.

На теореме о биссектрисах основано много красивых задач. Например, такая.

**Задача.** Параллельные прямые пересечены секущей $PQ$. Трисектриссы внутренних односторонних углов образовали, пересекаясь, четырёхугольник $ABCD$ (пусть, например, $A$ — его вершина, ближайшая к $PQ$. Найдите $\angle ACB$.

Решение состоит из несложного подсчёта, показывающего, что $\angle PCQ = 60°$ (у нас эта задача когда-то была), и красивого рассуждения: так как в треугольнике $PCQ$ биссектрисы $PB$ и $QD$ пересекаются в точке $A$, то через $A$ пройдёт и третья биссектриса, то есть, $\angle ACB = 30°$.

Задача (важная) Докажите, что биссектрисы двух внешних углов треугольника (прилежащих к одной стороне) пересекаются на биссектрисе угла этого треуглника, противолежащего указанной стороне.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в точке, равноудалённой от всех трех его вершин. Это — центр описанной окружности треугольника. Настала пора разговора о геометрии окружности.

Окружность. Пусть дана точка $O$ и положительное число $R$. ГМТ $X$ таких, что $AX = R$ — ***окружность*** с **центром** $O$ и ***радиусом*** $R$. Окружность обычно обозначают $\omega(O\,;\,R)$ или $\Omega(O\,;\,R)$.

Отрезок $OA$, где $A$ — точка окружности, также называют радиусом. Отрезок $AB$, где $A$, $B$ — точки окружности, называется ***хордой***, а если хорда содержит центр — ***диаметром***.

Помимо того, что окружность – ГМТ, удалённых от центра на фиксированное расстояние, она является и ещё одним важным ГМТ.

Теорема. Окружность — ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

Теорема эквивалентна свойству медианы прямоугольного треугольника. Данный отрезок — диаметр. Исключение — концы отрезка, из которых непонятно под каким углом виден отрезок. Обычно считается, что под любым, в том числе прямым, и поэтому эти точки тоже включают в ГМТ.

Следствие. Хорда не длиннее диаметра.
Доказательство: проведём диаметр через конец хорды и воспользуемся тем, что катет короче гипотенузы.

Теорема. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.
Доказательство: пусть $AB$ — хорда (но не диаметр), тогда треугольник $AOB$ равнобедренный, и его высота служит медианой. Если $AB$ диаметр, утверждение очевидно.

А верно ли обратное – диаметр, проходящий через середину хорды $AB$, перпендикулярен ей? Верно, но не совсем. Для хорды, не являющейся диаметром, верно, доказательство точно такое же. А вот если $AB$ диаметр, то неверно.

Окружность и прямая. Прямая может иметь с окружностью не более двух общих точек.
Если точек две, отрезок между ними – хорда а сама прямая для окружности называется ***секущей***. Если точка одна – ***касательной***.

Теорема. Прямая $m$ имеет с окружностью с центром $O$ ровно одну общую точку $A$ тогда и только тогда, когда $OA \perp m$.

Отношение между окружностью и прямой определяется расстоянием от центра окружности до прямой – если оно меньше радиуса, перед нами секущая, если равно – касательная, если больше – прямая и окружность не пересекутся.

Задача. Дан треугольник $ABC$. Маша нашла точку $D$, что $DA = 1$, $DB = 2$ и $DC = 3$. Арина тоже захотела найти другую такую точку $N$, что $NA = 1$, $NB = 2$ и $NC = 3$. Докажите, что у неё ничего не выйдет.

Задача. На окружности выбраны четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$ (в таком порядке против часовой стрелки). Известно, что $AB = CD$. Докажите, что $AC = BD$.

Упражнение. Начертите треугольник $ABC$. Закрасьте ГМТ $X$ таких, что $X$ внутри треугольника и $AB$ – ближайшая к ней его сторона.

Упражнение. Начертите треугольник $ABC$. Закрасьте ГМТ $X$ таких, что $CX \leqslant AB$.

Упражнение. Дан отрезок $[AB]$. Отметьте ГМТ $C$ таких, что треугольник $ABC$ прямоугольный.

Упражнение. Дан отрезок $[AB]$. Отметьте ГМТ $C$ таких, что треугольник $ABC$ равнобедренный.

Упражнение. Дан треугольник $ABC$. Отметьте ГМТ $X$ таких, что $AX = BX$, но $AX < CX$.

Две различные окружности не могут иметь более двух точек пересечения. Если их центры совпадают (такие окружности называются ***концентрическими***), то общих точек у них, очевидно, нет. Если центры разные ($O_1$ и $O_2$), а точек пересечения хотя бы три ($A$, $B$ и $C$), то $O_1O_2$ (так называемая ***линия центров***)— серединный перпендикуляр к отрезкам $[AB]$ и $[BC]$, чего быть не может.

Общая хорда двух окружностей. Если две окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$, то $O_1AO_2B$ — дельтоид. Его диагонали $O_1O_2$ (или её продолжение) пересекает $AB$ под прямым углом и делит её пополам (то есть, как уже говорилось, служит серединным перпендикуляром к $[AB]$). Отрезок $[AB]$ называют ***общей хордой*** двух окружностей. Говорят, что *линия центров перпендикулярна общей хорде и делит её пополам.*

Задача. На окружности $\omega$ фиксирована точка $A$. Найдите ГМТ, являющихся серединами хорд $AX$, где $X$ — произвольная точка окружности.

Ответом к этой задаче служит окружность, построенная как на диаметра на отрезке $[AO]$. Эта окружность и окружность $\omega$ ***внутренне касаются***, $A$ — их единственная общая точка.