7 класс, геометрия. Двадцать шестая неделя, 13 – 18 марта.

Задача с мосгора (8 класс), прошедшего в эти выходные.

Докажите, что в треугольнике $30 - 60 - 90$ биссектриса прямого угла вдвое короче биссектрисы угла $30°$.

Дополнительное построение в задачах №№ 3 и 4 самостоятельной работы сводится к осевой симметрии. Давайте скажем несколько слов про неё.

Определение. Пусть прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку $[AB]$. В этом случае говорят, что A и B ***симметричны относительно оси*** m. Также про любую точку, лежащую на m, говорят, что она симметрична сама себе относительно m.

Очевидно, что если задана m, то для любой точки плоскости найдётся симметричная ей и только одна. Преобразование, переводящее точку в симметричную ей, называется ***осевой симметрией*** или *(зеркальным) отражением* относительно m.

Можно отразить относительно прямой целую фигуру F (отразив все её точки). Получится новая фигура F' – *образ* фигуры F при симметрии. Говорят, что симметрия образ F в F'.

Можно доказать (мы строго сделаем это позже), что при симметрии прямая переходит в прямую, луч в луч, отрезок в отрезок (такой же длины), угол – в угол такой же величины. Зеркально-симметричные фигуры одинаковы.

Если при осевой симметрии относительно m фигура переходит сама в себя (то есть $F' = F$), говорят, что она ***симметрична*** относительно m (или что m — её ось симметрии).

Единственным симметричным треугольником является равнобедренный. Его ось симметрии — серединный перпендикуляр к основанию.

Симметричными четырёхугольниками являются дельтоид (относительно диагонали) и равнобедренная трапеция, а также прямоугольник (относительно общего серединного перпендикуляра к противоположным сторонам).

У прямоугольника на самом деле две оси симметрии (обе средние линии), у ромба тоже две (диагонали), у квадрата – четыре.

Ось симметрии угла — прямая, содержащая его биссектрису.

Помимо осевой симметрии (относительно прямой) существует ещё центральная симметрия (относительно точки).

Определение. Пусть точка O — середина отрезка $[AB]$. В этом случае говорят, что A и B ***симметричны относительно точки*** O. Про точку O говорят, что она симметрична сама себе.

Очевидно, что если задана O, то для любой точки плоскости найдётся симметричная ей и только одна. Преобразование, переводящее точку в симметричную ей, называется ***центральной симметрией*** относительно O.

Как и для осевой симметрии, прямая переходит в прямую, луч в луч, отрезок в отрезок (такой же длины), угол – в угол такой же величины. Центрально-симметричные фигуры одинаковы.

Если при центральной симметрии относительно O фигура переходит сама в себя, говорят, что она ***симметрична*** относительно O (или что O — её центр симметрии).

Центрально-симметричных треугольников не бывает а единственный центрально-симметричный четырёхугольник — параллелограмм.

Классический случай применения центральной симметрии – удвоение медианы. Продлевая медиану AM треугольника ABC на её длину мы получаем точку D, симметричную A относительно M, образом треугольника ABC становится треугольник DCB, дополняющий его до параллелограмма $ABDC$.

Решим задачу. Точки A и B лежат на сторонах угла $\angle APB$. На биссектрисе этого угла отмечены такие точки C и D, что $CA \perp AP$ и $DB \perp BP$. Пусть M – середина CD. Докажите, что $MA = MB$.