7 класс, геометрия. Двадцать пятая неделя, 06 – 11 марта.

Вот красивая задача с питерской олимпиады 2022 года.

Дан равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC. Внутри него выбрана точка D так что $\angle ADB = 90^\circ$. Точка E – середина AD. Оказалось, что $CE = DB$ и что $\angle CEB = 90^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

И ещё несколько задач.

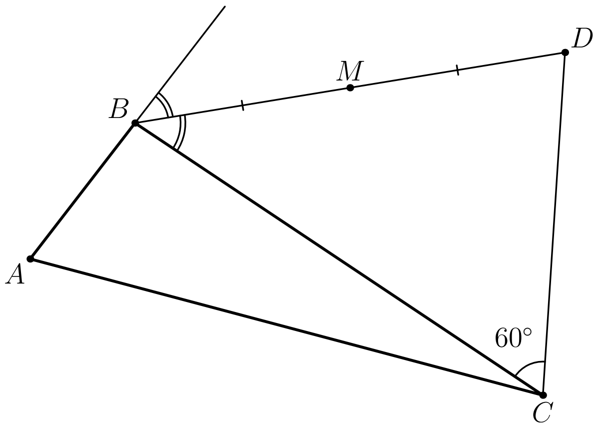
Точка M — середина стороны AB параллелограмма $ABCD$. На стороне CD отмечена точка K так, что $DC = 2 \cdot MK$. Найдите $\angle AKB$.

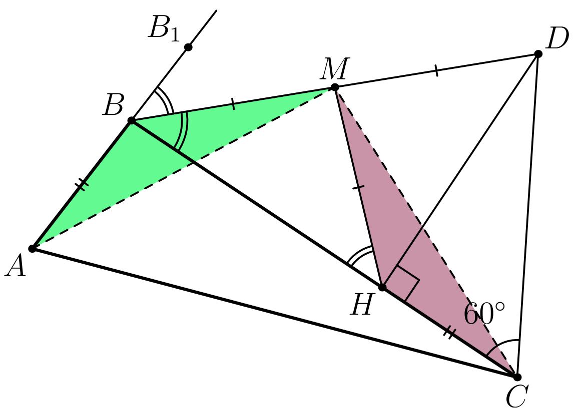
На стороне BC равнобедренного ($AB = BC$) треугольника отмечены точки P и Q (P между Q и C) так, что $\angle CAP = \angle QAB$ и $AP = PQ$. Найдите $\angle QAC$.

Одна из медиан прямоугольного треугольника равна одной из его сторон. Каков угол между ними?

Вот решение последней задачи из ДЗ. Она предлагалась девятиклассникам на региональном этапе Всеросса несколько лет назад.

$\boxed{8.}$ Известно (см. рис слева), что $CD = 2AB$. Докажите, что $AM = CM$.





Опустим из D перпендикуляр DH на BC. Заметим, что $MH = MB = MD$ как медиана прямоугольного треугольника, отсюда же $\angle BHM = \angle HBM = \angle MBB_1$ (назовём этот угол α). Кроме того, $CH = \frac{1}{2}CD = AB$. Теперь мы можем утверждать, что треугольники ABM и CHM равны по первому признаку (углы между соответственно равными сторонами $MB = MH$ и $AB = HC$ равны по $180^\circ - \alpha$), откуда $AM = CM$.

Несложная домашняя задача №3, при решении которой нужно было, в частности, нарисовать пятиугольник с углами 90°, 90°, 120°, 120°, 120°, навела одну из учениц (Машу Чжао) на интересный вопрос: а есть ли простой и эффективный алгоритм построения многоугольника по списку его углов?

Вопрос непростой. Мы можем дать решение для выпуклых многоугольников. Поставим задачу так:

Пусть даны числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$, каждое из них положительно и меньше 180°, а сумма всех равна $180^\circ(n-2)$. Как построить многоугольник, углы которого последовательно равны этим числам?

<u>Лемма.</u> При $n > 4$ в нашем списке найдутся два соседних угла, сумма которых превышает 180°. При $n = 4$ такая пара тоже найдётся, за исключением ситуации, когда список имеет вид α, $180^\circ - \alpha$, α, $180^\circ - \alpha$. (Мы считаем, что углы как бы написаны по кругу, в частности, α_n соседствует с α_1.)

Доказательство леммы. Пусть n чётно и утверждение неверно. Тогда $\alpha_1+\alpha_2 \leqslant 180^\circ$, $\alpha_3+\alpha_4 \leqslant 180^\circ$, $\ldots$, $\alpha_{n-1}+\alpha_n \leqslant 180^\circ$. Сложим эти неравенства и получим $180^\circ(n-2) \leqslant 180^\circ \cdot \frac{n}{2}$. Получим после упрощения $n \leqslant 4$. То есть, при всех чётных $n > 4$ лемма верна. Случай же $n = 4$ возможен только если во всех неравенствах, которые мы складывали (в данном случае, в двух) было точное равенство. То есть $\alpha_1+\alpha_2 = 180^\circ$ и $\alpha_3+\alpha_4 = 180^\circ$. Сдвинув нумерацию по циклу, получим ещё, что $\alpha_2+\alpha_3 = 180^\circ$ и $\alpha_4+\alpha_1 = 180^\circ$, это и означает то самое исключение, которое описано в лемме.

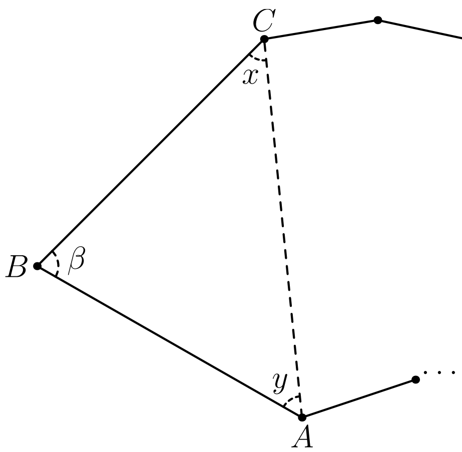
Пусть теперь n нечётно и утверждение неверно. Тогда снова разобьём на пары, а последний угол напишем отдельно: $\alpha_1+\alpha_2 \leqslant 180^\circ$, $\alpha_3+\alpha_4 \leqslant 180^\circ$, $\ldots$, $\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1} \leqslant 180^\circ$, $\alpha_n < 180^\circ$. Снова сложим и получим $180^\circ(n-2) < 180^\circ \cdot \frac{n+1}{2}$ (теперь неравенство строгое, потому что последнее из суммируемых неравенств строгое). Упрощая, получим $n < 5$, то есть лемма верна для всех нечётных $n > 4$. Лемма полностью доказана.

Теперь опишем построение. Четырёхугольник-исключение будет параллелограммом, его построить легко, в дальнейшем будем считать, что этот случай нам не встретился. Доказательство будем вести индукций по n.

БАЗА: $n = 3$. Построить треугольник по его углам несложно.

ПЕРЕХОД. Пусть мы умеем строить $(n-1)$-угольник по списку углов. Рассмотрим n чисел α_1, α_2, α_3, $\ldots$, α_{n-1}, α_n. По лемме выберем два соседних, сумма которых больше 180°; перенумерацией можно добиться, чтобы это были α_{n-1} и α_n. Заменим эти два числа на $\beta = \alpha_{n-1}+\alpha_n-180^\circ$. В силу леммы $\beta > 0$, также, очевидно, $\beta < 180^\circ$. Количество чисел уменьшилось на одно, сумма – на 180°, то есть набор α_1, α_2, α_3, $\ldots$, α_{n-2}, β удовлетворяет всем условиям, и по предположению индукции мы умеем строить многоугольник с такими углами.

Пусть построен, рассмотрим его фрагмент:



Заметим, что $x+y = 180^\circ-\beta$, но также и $(180^\circ-\alpha_{n-1})+(180^\circ-\alpha_n) = 180^\circ-\beta$. Это означает, что либо $x = 180^\circ-\alpha_{n-1}$ и $y = 180^\circ-\alpha_n$, либо в одной паре знак $>$, а в другой $<$, пусть, например, $x > 180^\circ-\alpha_{n-1}$. В первом случае передвинем AC параллельно и получим нужный многоугольник, во втором тоже передвинем, а потом отложим угол $180^\circ-\alpha_{n-1}$.