7 класс, геометрия. Двадцать вторая неделя, 06 – 11 февраля.

Мы доказали важное свойство прямоугольного треугольника с углом $30°$ – его более короткий катет вдвое короче гипотенузы.

Если в треугольнике одна сторона вдвое короче другой, то это, конечно, вовсе не обязательно треугольник «30-60-90». Но если дополнительно известно, что один из его углов соответтсвенно равен $30°$, $60°$, $90°$, то это именно он. Сформулируем это в виде задач.

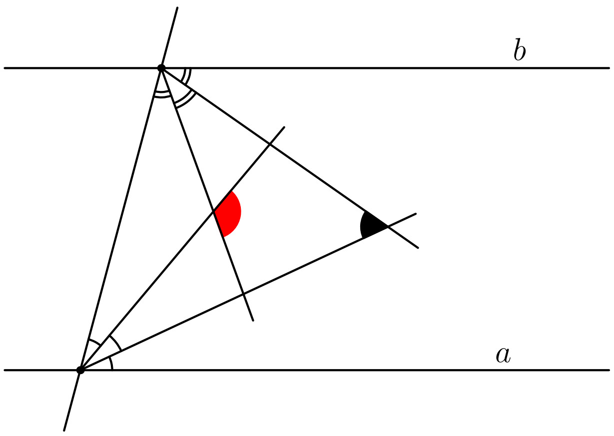
Задача. В прямоугольном треугольнике катет вдвое короче гипотенузы. Найдите углы этого треугольника.

Задача. В треугольнике одна сторона вдвое короче другой, а угол между ними равен $60°$. Найдите углы этого треугольника.

Задача. В треугольнике одна сторона вдвое короче другой, а угол, противолежащий меньшей из этих сторон, равен $30°$. Найдите углы этого треугольника.

Домашняя задача №1 – частный случай известной теоремы о средней линии треугольника.

В несложной задаче №3 из СР можно ещё найти не только чёрный, но и красный угол.



Ещё в этой задаче проведены лучи, делящие внутренние односторонние углы на три равные части. Такие лучи называют трисектрисами.

Трисектрисы угла — два луча, которые делят его на три равные части. Отрезки трисектрис угла треугольника, лежащие внутри него, — ***трисектрисы*** (угла) треугольника.

Трисектрисы дают большой простор для придумывания разных задач на подсчёт углов. Например:

Задача. Докажите, что если трисектрисы угла треугольника равны, то он равнобедренный.

Или:

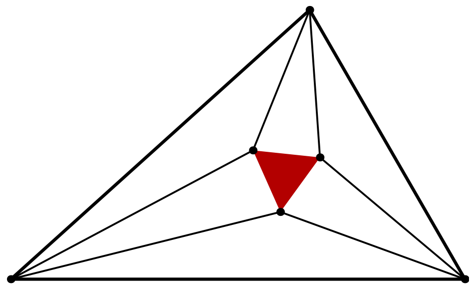
Задача. Угол треугольника равен $30°$, а одна из трисектрис другого его угла перпендикулярна одной из трисектрис его третьего угла. Найдите углы этого треугольника.

Трисектрисы связаны со многими известными математическими сюжетами. Расскажем про два из них.

Во-первых, древнегреческим математикам, несмотря на большие усилия, так и не удалось научиться строить трисектрисы произвольного угла циркулем и линейкой. Эта задача — *задача о трисекции угла* — стала одной из трёх знаменитых нерешённых задач древности (наряду с задачами о *квадратуре круга* и *удвоении куба*). Эта задача не зря не поддавалась грекам — она неразрешима.

Это доказал в середине XIX века французский математик Пьер Ванцель.

Во-вторых, английский математик Фрэнк Морли в начале XX века обнаружил удивительно красивый факт — если в произвольном треугольнике провести трисектрисы всех углов, то закрашенный на рисунке треугольник всегда будет правильным. За последние сто лет нашли много доказательств этой теоремы, но ни одного сравнительно простого не обнаружили.



В треугольнике «30-60-90» одна из трисекрис к гипотенузе медиана, а другая – высота. Оказвается, верно и обратное:

Задача. В треугольнике одна из трисектрис, проведённых из некоторой вершины, оказалась медианой, а вторая – высотой. Докажите, что этот треугольник – «30-60-90».

Задача. Докажите, что высота в прямоугольном треугольнике с углом $15°$, опущенная на гипотенузу, вчетверо её короче.

Иногда у нас остаётся время порешать задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в 8 матакласс в разные годы.

Задача (2010 год). На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = 1$, $BD = 2$ и $CD = 3$. Найдите $\angle ADB$.