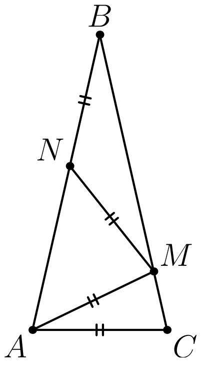
# 7 класс, геометрия. Двадцатая неделя, 23-28 января.

Упражнение. Угол между медианой и высотой прямоугольного треугольника, проведёнными к гипотенузе, составляет $20°$. Найдите острые углы этого треугольника.

Задача. См. рисунок. Известно, что $AB = BC$. Найдите углы треугольника $ABC$.




**Определение**. Многоугольник называется ***правильным***, если все его стороны равны и все углы равны.

Угол правильного многоугольника, очевидно, равен $\frac{180°(n-2)}{n}$. Квадрат — правильный четырёхугольник. Правильный треугольник, все стороны которого равны, а все углы по $60°$, чаще называют ***равносторонним***. Действительно, если все стороны треугольника равны, то и все углы равны. Но даже для четырёхугольника это неверно — все стороны ромба равны, но ромб не обязательно квадрат. Поэтому говорить «равносторонний» вместо «правильный» можно только о треугольнике.

Правильные $n$-угольники существуют. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим отрезок $OA_1$. От луча $[OA_1)$ отложим угол $\frac{180°}{n}$, на нём отметим отрезок $OA_2 = OA_1$. От луча $[OA_2)$ снова отложим угол $\frac{180°}{n}$, на нём отметим отрезок $OA_3 = OA_2$ и так далее, пока круг не замкнётся. Нетрудно показать, что $A_1A_2 \ldots A_n$ – правильный многоугольник (а точка $O$ называется его ***центром***).

Задача. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка $E$ так, что $AED$ — равносторонний треугольник. Найдите $\angle ABE$.

(Продолжение.) Пусть $T = AC \cap ED$. Докажите, что $CT = EB$.

Сумма внешних углов треугольника. Если отметить внешние углы при каждой вершине треугольника (по одному разу), их сумма составит $360°$. Если внутренние углы треугольника обозначить $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, то внешние углы, как известно, будут равны $\beta+\gamma$, $\alpha+\gamma$ и $\beta+\alpha$. В сумме получается $2(\alpha+\beta+\gamma) = 360°$.

Можно рассуждать иначе. Внешние углы составят $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$, их сумма $540° - (\alpha+\beta+\gamma) = 360°$.

В случае произвольного $n$-угольника первое рассуждение не очень помогает, а второе проходит:

**Теорема.** Сумма внешних углов (выпуклого) $n$-угольника равна $360°$. В самом деле, если внутренние углы обозначить $\alpha_1$, $\alpha_2$, и так далее, то сумма внешних углов равна $180° - \alpha_1 + 180° - \alpha_2 + \ldots + 180° - \alpha_n = 180° \cdot n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 180° \cdot n - 180° \cdot (n-2) = 360°$. Любопытно, что ответ не зависит от $n$.

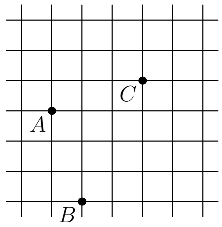
Этот факт можно объяснить ещё и таким образом. Представим себе многоугольник в виде некоторого «секретного объекта», обнесённого забором. Часовой идёт вдоль забора, обходя его против часовй стрелки. Каждый раз, доходя до угла, он поворачивает как раз на внешний угол. В итоге он поворачивается на сумму всех внешних углов, и при этом делает оборот вокруг своей оси, то есть поворачивается как раз на $360°$.

Интересно, что это рассуждение можно с некоторыми оговорками применить и к невыпуклому многоугольнику. Зайдя в невыпуклый угол величиной $\alpha > 180°$, часовой поворачивается на $\alpha - 180°$, но в другую сторону, по часовой стрелке. Можно считать, что он как бы поворачивается на «отрицательный угол» $180° - \alpha$. Все эти углы поворотов (положительные и отрицательные) в итоге сложатся и дадут $360°$.

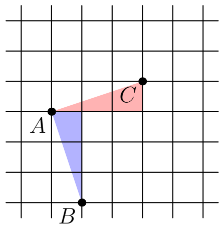
Более того, это рассуждение в каком-то смысле доказывает формулу суммы углов для невыпуклого многоугольника! Ведь если $360° = (180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + \ldots + (180° - \alpha_n)$, то на $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ приходится как раз $180° \cdot (n-2)$.

Попробуем теперь заняться тем, что у нас всегда под рукой – обычной бумагой в клеточку. Будем считать, что плоскость разбита на равные квадраты (клеточки), сторона клеточки, если не сказано иное, считается равной 1. Эта сетка позволяет формулировать и решать интересные задачи.

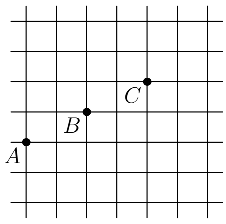
<u>Задача.</u> Найдите $\angle ABC$.




Ответ $45°$. Это потому, что треугольник $ABC$ равнобедренный прямоугольный. Это, в свою очередь, следует из равенства цветных треугольников:

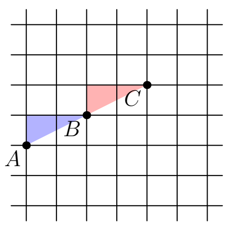



Довольно очевидно такое полезное соображение: точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой.

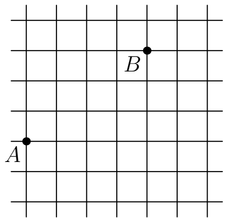



Мы не будем всякий раз доказывать это, если встретим такую конструкцию (и на олимпиаде вряд ли придерутся к тому, что это не обосновано), но один раз строго доказать надо.

Опять же, помогают цветные треугольники. Угол $\angle ABC$ развёрнутый, сложен из прямого угла и двух острых углов прямоугольного треугольника.




Вот ещё <u>задача.</u> Найдите $AB$.




Ответ нетрудно найти всякому, кто знает теорему Пифагора. Но как обойтись без неё? Можно отметить точку $C$ так, что $AC = 5$, и доказать, что $CAB$ равнобедренный. Для этого можно отметить $N$ (середину $[BC]$) и доказать, что $AN \perp BC$. И снова нам приходят на помощь цветные треугольники: