7 класс, геометрия. Вторая неделя, 05 – 10 сентября.

Упражнение. Все точки $M \in (AB)$ такие, что A между M и B, стёрли. Что осталось от прямой? [Луч $[AB)$]

Упражнение. А это что такое: $[AB) \cap [BA)$? [Это $[AB]$]

Упражнение. Начертите два луча, $[AB)$ и $[CD)$ так, чтобы $[AB) \cap [CD) = \emptyset$ и $[AB) \cap (CD) = K$.

Мы знакомимся с геометрией как бы одновременно с двух позиций. С одной стороны, мы хорошо интуитивно себе представляем прямые, точки и их свойства, и уже можем ставить и решать сложные задачи. С другой же стороны, выводя всё из аксиом, мы играем в игру "всё доказывай, ничего не принимай на веру, помни – наглядность может быть обманчива".

Вопросы. Вот например, обязана ли на прямой быть хотя бы одна точка? [Ответ: да, это явно требует 1-я аксиома прямой.] А может ли быть на прямой ровно одна точка? [Ответ: а почему бы и нет?] А существуют ли параллельные прямые? [Ответ: не всегда. Например, их нет в трёхточечной геометрии.]

Задача. Докажите, что если существует прямая, на которой есть ровно одна точка, то существуют параллельные прямые. [Решение. Пусть $A \in a$, и на a нет других точек. Рассмотрим $B \notin a$ (такая есть по первой аксиоме). По второй аксиоме есть прямая (AB). Теперь по первой аксиоме есть точка C вне (AB). На a она лежать не может. По второй аксиоме есть прямая (BC). Ясно, что $a || (BC)$.]

С микрогеометриями из нескольких точек можно ещё долго возиться. Но мы понимаем, что в нашей геометрии на всякой прямой бесконечно много точек. Пора уже записать аксиомы, из которых это будет следовать.

Первая аксиома отрезков. Любой отрезок имеет положительную длину. Длину любого отрезка можно принять за единицу, и тогда длина каждого отрезка будет однозначно определена.

Длина отрезка $[AB]$ обозначается просто AB. Иногда пишут также $|AB|$.

Вторая аксиома отрезков. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой. Коротко: $\forall\ M \in [AB]\ AM + MB = AB$.

Третья аксиома отрезков. На любом луче от его начала можно однозначно отложить отрезок любой заданной длины. Коротко: $\forall\ x > 0\ \forall\ [AB)\ \exists!\ M \in [AB)\ |\ AM = x$.

Из третьей аксиомы кажется понятным, почему на прямой бесконечно много точек. Действительно, на прямой (AB) можно рассмотреть луч $[AB)$ и по третьей аксиоме отрезков на нём можно отложить отрезок $[AM]$ любой длины, получив тем самым сколько угодно разных точек M.

Однако есть тонкость. А что если на прямой ровно одна точка? Тогда там нет лучей, и все рассуждения с третьей аксиомой неприменимы.

На самом деле на прямой одна точка быть не может. Аксиомы прямой это, правда, не запрещают (и мы строили пример), а вот аксиомы отрезков уже запрещают.

Посмотрим, почему это так. Пусть $A \in a$, и на a больше точек нет. Возьмём $B \notin a$ и $C \notin (AB)$. На луче $[CA)$ отложим M так, чтобы $CM = 2 \cdot CA$. Тогда относительно a точки B и C в одной полуплоскости (потому что $[BC]$ не пересекает a), а точки M и C в разных (потому что $[MC]$ пересекает a в точке A). Но тогда и $[MB]$ должен пересечь a, но ему негде это сделать!

А из второй аксиомы следует ли, что если $AM + MB = AB$, то $M \in [AB]$? Напрямую вроде бы не следует (хотя это и верно). Но вот если точки на одной прямой, то следует. Докажите, что если $AM + MB = AB$, то $M \in [AB]$ для точек одной прямой.

Упражнение $AB = 15$, $BC = 43$. Чему равно AC? Не торопитесь отвечать 58. Мы ведь даже не сказали, что отрезки на одной прямой! Ну хорошо, ладно, A, B и C на одной прямой. Тогда уж точно 58? Нет, может быть и 28. От данной точки отложить отрезок данной длины можно двумя способами - на каждом луче свой отрезок.