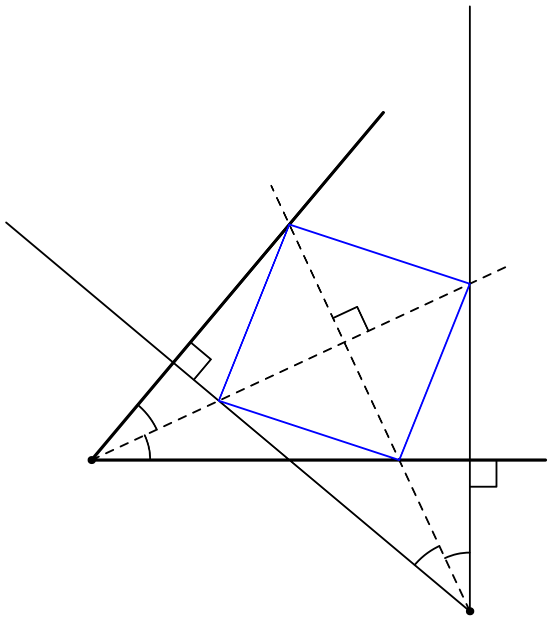
7 класс, геометрия. Девятнадцатая неделя, 16-21 января.

Задача. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, у которого $\angle A = 36°$, взята такая точка D, что $CD = CB$. Докажите, что отрезок CD пересекает биссектрису $\angle A$ в её середине.

Задача (важная). Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \alpha$. Пусть биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$ пересекаются в точке I. Докажите, что $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Задача. В самостоятельной работе мы доказали, что биссектрисы углов с перпендикулярными сторонами перпендикулярны друг другу (см рис). Докажите, что точки пересечения этих биссектрис со сторонами – вершины ромба.

Напомним **Определение.** Четырёхугольник, все стороны которого равны, называется ***ромбом.*** Ромб является (по признакам) и параллелограммом и дельтоидом. Его диагонали перпендикулярны, имеют общую середину и для каждой пары противоположных углов являются биссектрисами.



Решение простое, но его надо разглядеть. Биссектриса каждого из углов отрезает от другого угла равнобедренные=й треугольник (потому что у него высота является биссектрисой). Но тогда высота является и медианой. Это значит, что диагонали синего четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам.

Также они перпендикулярны, поэтому делят параллелограмм на четыре равных друг другу треугольника. Получился ромб.

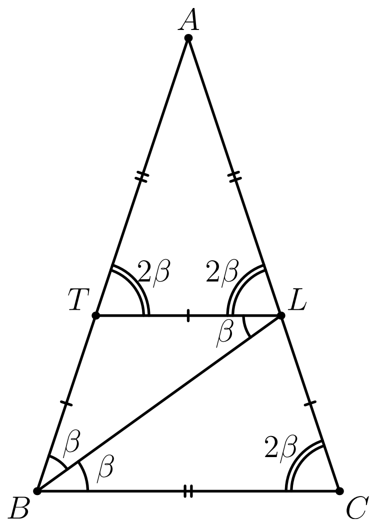
Разберём трудную домашнюю задачу №8.

$\boxed{8.}$ В равнобедренном ($AB = AC$) треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Оказалось, что $CB = LA$. Найдите углы треугольника ABC.

Внешне она похожа на простую задачу №7, где AL оказывается в итоге биссектрисой, а угол при вершине треугольника равным $36°$.

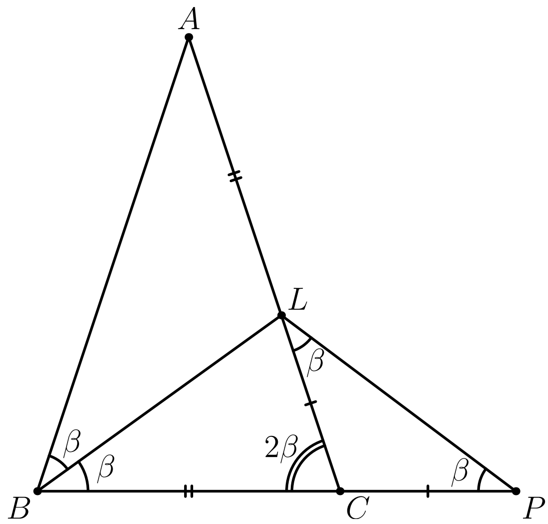
$\boxed{7.}$ На боковой стороне AC равнобедренного ($AB = AC$) треугольника ABC взята точка L так, что $CB = BL = LA$. Найдите углы треугольника ABC.

Одно из решений основано на построении отрезка, параллельного основанию. Это решение придумали Катя, Оля, Вероника.



Проведём $LT||BC$, отметим равные углы (соответственные при секущей AC и накрест лежащие при секущей LB). Ясно, что $AL = AT$, тогда $CL = BT$ (разность равных), но ещё $BT = TL$, так как $\triangle BTL$ равнобедренный. Теперь неожиданное равенство треугольников $\triangle ALT \stackrel{I}{=} \triangle BCL$, и теперь в $\triangle BCL$ $5\beta = 180°$.

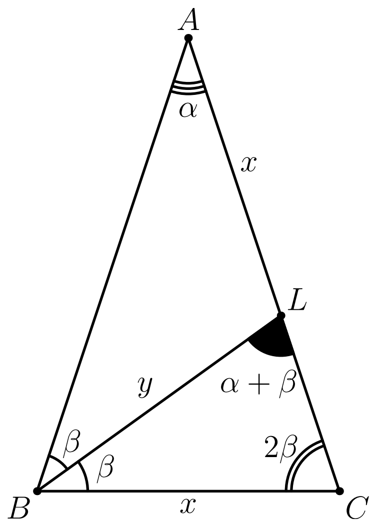
Другое решение основано на том, что биссектриса угла является его осью симметрии. Его придумал Лёня, похожее решение также дал Даня.



На продолжении стороны BC за точку C отметим точку P так, что $LC = CP$. В равнобедренном треугольнике сумма равных углов равна 2β, так что они оба по β. Заметим, что $BP = AC = AB$. Поэтому $\triangle DBL \stackrel{I}{=} \triangle ABL$, и теперь в $\triangle ABL$ угол при A равен β, так что $5\beta = 180°$.

Есть и довольно неожиданное решение вообще без дополнительных построений! Оно принадлежит Грише и содержит рассуждение от противного.

Отметим углы 2β при основании и α при вершине. Если мы докажем, что $\beta = \alpha$, то будет $x = y$ как в задаче №7, и $5\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 36°$.



Ну хорошо, пусть $\beta \neq \alpha$. Например, $\beta > \alpha$. Тогда из $\triangle BAL$ имеем $x > y$. Но в $\triangle BCL$ получается $\alpha + \beta < 2\beta$, и поэтому $x < y$. Противоречие. Случай $\beta < \alpha$ разбирается аналогично.

Разберём ещё домашнюю задачу №4. Она, конечно, не по геометрии, но тем не менее.

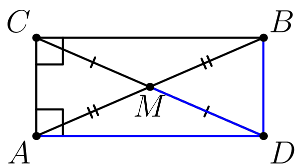
$\boxed{4.}$ Один угол n-угольника прямой, а остальные равны одному и тому же целому числу градусов. При каких n такой n-угольник возможен?

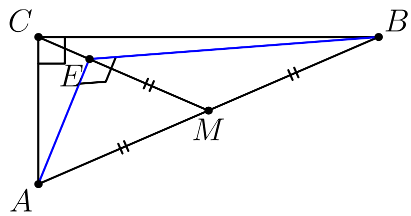
Пусть остальные углы по x градусов, тогда $90 + (n-1)x = 180(n-2)$. Это можно переписать как $270 + (n-1)x = 180(n-1)$. А это как $270 = (180 - x)(n-1)$. Теперь ясно, что раз $180 - x$ — целое число, то 270 делится на $(n-1)$ нацело. Разложив 270 на простые множители $(270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5)$, выпишем все его делители, их довольно много: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135, 270. Увеличив эти числа на 1 и исключив 2, поскольку двуугольников не бывает, получим ответ: при $n \in \{3, 4, 7, 10, 11, 16, 19, 28, 31, 46, 55, 91, 136, 271\}$.

Теорема (свойство и признак прямоугольного треугольника). В прямоугольном треугольнике медиана к гипотенузе равна её половине. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой проведена, то этот треугольник прямоугольный, а сторона — гипотенуза.

Второе предложение — признак прямоугольного треугольника — мы доказали дома (задача №2). Первое предложение — свойство прямоугольного треугольника — доказывается сложнее.

Мы приведём два доказательства этого свойства. Пусть ABC — данный треугольник, CM — медиана. Можно (см. левый рисунок) продлить медиану на её длину, построив параллелограмм $ACBD$. У него $AD = BC$, кроме того, $\angle DAC = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$, поскольку $AD || BC$, а AC — секущая. Получаем, что треугольники DAC и BCA равны по двум катетам, тогда $CD = AB$, а это по сути нам и нужно.





Второе доказательство (правый рисунок) идейно устроено примерно так же, как Гришино решение задачи №8. Пусть $CM \neq AM$, а, например, $CM > AM$. Тогда отметим на отрезке $[CM]$ точку E так, что $EM = AM = BM$. Тогда треугольник AEC прямоугольный по признаку. Но точка E внутри треугольника ABC, так что должно быть $\angle AEB > \angle ACB$, а у нас не так. Случай $CM < AM$ разбирается точно так же.

В первом доказательстве мы построили параллелограм с прямым углом и по ходу поняли, что все его углы прямые. Это прямоугольник.

Определение. Параллелограмм, хотя бы один угол которого прямой, называется ***прямоугольником***.

Как мы понимаем, тогда все углы этого параллелограмма прямые. Также справедливо, что четырёхугольник, все (достаточно трёх, на самом деле) углы которого прямые, будет прямоугольником. В самом деле, его противоположные стороны будут параллельны как два перпендикуляра к одной прямой. Фактически мы только что доказали вот что:

Свойство и признак прямоугольника. Диагонали прямоугольника равны. Если диагонали параллелограмма равны, этот параллелограмм — прямоугольник.

И наконец для полноты коллекции:

Определение. ***Квадратом*** называется прямоугольник, являющийся ромбом.

Все стороны квадрата равны, все его углы прямые. Диагонали квадрата равны, перпендикулярны друг другу и образуют со сторонами углы по $45°$.