7 класс, геометрия. Восемнадцатая неделя, 09-14 января.

Утверждение. Противоположные стороны параллелограмма параллельны.

Задача (важная). Если противоположные стороны четырёхугольника попарно параллельны, это параллелограмм.

Эти два факта можно объединить: «Четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны». (Иногда слова "попарно параллельны" уточняют: "то есть лежат на параллельных прямых".) Это значит, что это утверждение можно принять за определение параллелограмма. Именно такое определение и является общепринятым. С ним связан и сам термин "параллелограмм". Мы также будем отныне придерживаться этого определения.

Определение. Четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, называется ***параллелограммом***.

Наше же старое определение теперь будем считать признаком и свойством параллелограмма.

Напомним, что ***углом между прямыми считается наименьший из углов***, которые образуются при их пересечении (а угол между параллельными прямыми условно считается равным 0).

Задача (важная). Углы между попарно параллельными прямыми равны.

Задача. Луч света последовательно отражается относительно двух перпендикулярных зеркал. Докажите, что он возвращается по параллельному направлению. (Эта задача объясняет принцип действия катафота.)

На теореме о сумме углов треугольника основаны многочисленные типовые задачи, связанные с расчётом углов. Полезно помнить, что углы при основании равнобедренного треугольника и угол при основании связаны друг с другом: если углы при основании по α, то при вершине $180° - 2\alpha$. Или так: если при вершине 2α, то при основаниях по $90° - \alpha$.

Упражнение. У равнобедренного треугольника один из углов вдвое больше другого. Чему он равен?

Упражнение. Какие-то два угла равнобедренного треугольника отличаются на $15°$. Чему равен наибольший из них?

Упражнение. В треугольнике есть два угла, отличающиеся вдвое. Самый большой угол этого треугольника равен $96°$. А чему равен самый маленький?

Важная задача! Запомните! Докажите, что сумма углов четырёхугольника равна $360°$.

(вторая) Теорема о внешнем угле. Внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с ним.

Конечно, из этой теоремы следует первая – сумма больше любого слагаемого. Поэтому эта теорема как бы «вытесняет» первую, и первую мы больше применять не будем, а теоремой о внешнем угле назовём именно эту. Но и про ту будем помнить – она справедлива даже в геометрии Лобачевского!

Упражнение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC, CD — его биссектриса, $\angle ADC = 150°$. Найдите углы треугольника ABC.

Важная задача! Запомните! Прямые a и b пересекаются под углом α. Известно, что $a' \perp a$ и $b' \perp b$. Под каким углом пересекаются a' и b'?

Сумма углов четырёхугольника равна $180° \cdot 2 = 360°$, потому что четырёхугольник можно разрезать диагональю на два треугольника. Аналогично, пятиугольник можно разрезать на три треугольника, шестиугольник – на четыре, и так далее. В общем случае, n-угольник режется на $(n-2)$ треугольника. Так можно доказать общую формулу для суммы углов:

Теорема. Сумма углов n-угольника равна $180° \cdot (n-2)$.

Ну только легко сказать «можно разрезать». Если n-угольник выпуклый, то, конечно, можно – например, провести все диагонали из одной вершины. Разрезать же невыпуклый многоугольник на треугольники (разрезание на треугольники называется красивым словом *триангуляция*) тоже можно, но это довольно сложная теорема. Придётся доказывать:)

Есть ещё красивое рассуждение. Поставим внутри n-угольника точку и соединим со всеми вершинами. Многоугольник разрежется на n треугольников. Их сумма углов равна $180° \cdot n$, и это сумма углов многоугольника, кроме «лишних» углов вокруг поставленной нами точки. Эти лишние углы дают в сумме $360°$, так что в итоге получим $180° \cdot n - 360° = 180° \cdot (n-2)$. Конечно, это тоже никакое не доказательство — выбрать так точку можно далеко не всегда.

Доказательство того, что любой многоугольник можно триангулировать (то есть разрезать на треугольники непересекающимися диагоналями), легко получается, если доказать основную лемму.

Лемма о диагонали. Для любого n-угольника $(n > 3)$ найдётся диагональ, лежащая внутри него.

В самом деле, если лемма верна, то любой n-угольник можно триангулировать. Заметим, что треугольник уже триангулирован. Пусть утверждение неверно, и есть многоугольники, которые триангулировать нельзя. Найдём среди них многугольник с наименьшим числом сторон. Внутри него по лемме есть диагональ. Она разбивает его на два многоугольника, каждый из которых имеет меньше сторон, чем исходный, и поэтому в обоих можно провести диагонали, разрезав их на треугольники. Сделаем это, – и у нас разрежется исходный многоугольник, а мы предположили, что это сделать нельзя. Полученное противоречие завершает доказательство.

Таким же манером можно объяснить, почему при триангуляции n-угольника всегда получится именно $(n-2)$ треугольника. Это безусловно так для $n = 3$ и $n = 4$. Если допустить, что есть n-угольники, нарушающие утверждение (то есть, имеющие триангуляцию не на $(n-2)$ треугольника, а на какое-то иное количество), рассмотрим тот из них, у которого n минимально. Начнём триангуляцию, проведя диагональ. Наш n-угольник разобьётся на k-угольник и $(n+2-k)$-угольник. Для них утверждение верно, то есть при дальнейшей триангуляции в k-угольнике образуется $(k-2)$ треугольника, а в $(n+2-k)$-угольнике – $(n-k)$ треугольников. Всего, таким образом, будет $(n-2)$ треугольника. Это противоречит нашему предположению.

Доказательств леммы известно несколько, но все они непростые. В листке №7 мы приводили одно из доказательств (взятое из сборника "Задачи по планиметрии" В. В. Прасолова). Впоследствии мы приведём ещё одно доказательство (из классического сборника "Планиметрия" Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома). В нём используются параллельные прямые, поэтому мы его отложили до того времени, когда начнём с ними активно работать.