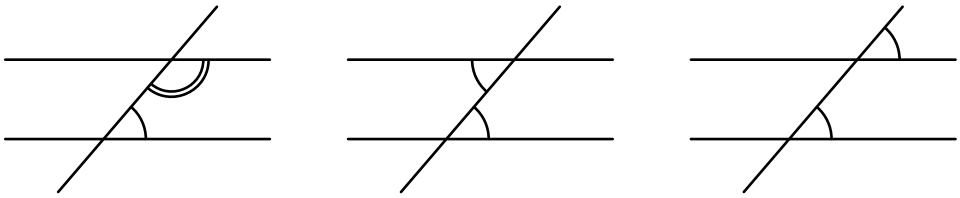
7 класс, геометрия. Семнадцатая неделя, 26-31 декабря.

Задача (важная). Пусть от луча $[AB)$ отложен угол $\angle BAC = \alpha$ и от луча $[BA)$ отложен в ту же полуплоскость угол $\angle ABD = 180° - \alpha$. Тогда $(AC)||(BD)$.

Следствие. Два перпендикуляра к одной прямой параллельны.

Как бы определение. Прямая, пересекающая две другие прямые, называется ***секущей*** к ним.

Это не совсем определение, потому что так говорят не всегда. В треугольнике ABC прямая (AB), безусловно, пересекает прямые (AC) и (BC) (в точках A и B соответственно), но вряд ли кто-то назовёт её секущей. Термин "секущая" закрепился за ситуацией, когда две прямые, которые пересекает секущая, параллельны друг другу или когда от них это в каком-то смысле ожидается или допускается.



Определение. Две прямые и секущая к ним образуют некоторое количество пар углов, за которыми закрепились названия (см. картинки). Так, углы на картинке слева называют ***внутренними односторонними***, углы на картинке в центре — ***внутренними накрест лежащими***, углы же на правой картинке — ***соответственными***. В некоторых источниках упоминаются ещё внешние односторонние или внешние накрест лежащие углы, но и перечисленных названий достаточно чтобы запутаться. Нетрудно видеть, что решённая только что задача может быть переформулирована, и ввиду важности факта, назовём её теоремой:

Теорема (признаки параллельности прямых). Если при пересечении двух прямых секущей сумма образующихся при этом двух внутренних односторонних углов равна 180° (или: внутренние накрест лежащие углы равны) (или: соответственные углы равны), то эти прямые параллельны.

Справедливо и обратное утверждение, однако с его формулировкой, доказательством и местом в геометрической теории связана одна из самых драматических страниц в истории геометрии.

В "Началах" Евклида нужное утверждение формулируется как аксиома, а точнее, постулат постулат, по сути, то же, что аксиома, у Евклида эти понятия различаются, но не будем вдаваться в тонкости. Этот постулат записан под номером 5 и гласит:

И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

В современных терминах: если сумма внутренних одностороних углов при секущей меньше 180°, то прямые не параллельны, а пересекаются, причём в той полуплоскости, где лежат упомянутые углы.

Этот ***пятый постулат*** Евклида настолько разительно отличался по сложности и тяжеловесности формулировки от остальных (таких как "через две точки проходит ровно одна прямая"), что и во времена Евклида и в течение двух тысяч лет после него вызывал во многих математиках желание его доказать. Слова "пятый постулат" (или "одиннадцатая аксиома", потому что в популярных в Европе изданиях "Начал"постулаты и аксиомы были объединены, и эта аксиома стала 11-ой) стали, наряду с "квадратурой круга" и "трисекцией угла", символом неразрешимой математической проблемы.

Окончательное решение проблемы пятого постулата нашлось только в XIX веке. Математики доказали, что пятый постулат — действительно аксиома, она независима от других аксиом и не может быть из них выведена.

В ходе многовековых попыток доказать пятый постулат, было придумано много утверждений, равносильных ему. Десятки учёных торжественно публиковали комментарии к Евклиду, утверждая, что доказали злосчастный пятый постулат — но на самом деле они опирались на вроде бы очевидное утверждение, которое, если копнуть поглубже, оказывалось тем же самым пятым постулатом. В современных учебниках он формулируется так:

Аксиома параллельных. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести ровно одну прямую, параллельную данной.

Теорема (свойства параллельных прямых). Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма образующихся при этом внутренних односторонних углов равна $180°$, внутренние накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны.

Доказательство. Ясно, что все утверждения эквивалентны друг другу, достаточно доказать одно. Пусть, например, $a||b$, секущая пересекает a и b в точках A и B соответственно, и сумма внутренних односторонних углов не равна $180°$. Проведём через A прямую a' так, чтобы сумма внутренних односторонних углов при a', b и секущей (AB) равнялась $180°$. Тогда по признаку $a'||b$, то есть, через A проведены две прямые, параллельные b, что нарушает аксиому параллельных.

Теорема (транзитивность параллельности). $(a||b,\ b||c) \to a||c$.

Заметим, что удобно договориться, что $a||a$. В самом деле, $a||b,\ b||a$, значит $a||a$.

Утверждение. Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и вторую.

Утверждение. Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и второй.

И вот вам в честь наступающих праздников подарок!

Теорема (долгожданная :). Сумма углов любого треугольника равна $180°$.

Доказательство. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Проведём через B прямую, параллельную (AC). Эта прямая образует со сторонами AB и BC треугольника углы, равные α и β соответственно (накрест лежащие). Поэтому сумма $\alpha + \beta + \gamma$ составит развёрнутый угол.