7 класс, геометрия. Пятнадцатая неделя, 19-24 декабря.

Теорема (неравенство медианы). Медиана треугольника меньше среднего арифметического (полусуммы) сторон этого треугольника, выходящих из той же вершины.

Подсказка к доказательству. Удвойте медиану!

Задача (важная). Есть четыре дома в вершинах выпуклого четырёхугольника. Где нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние от всех домов до школы было минимально возможным?

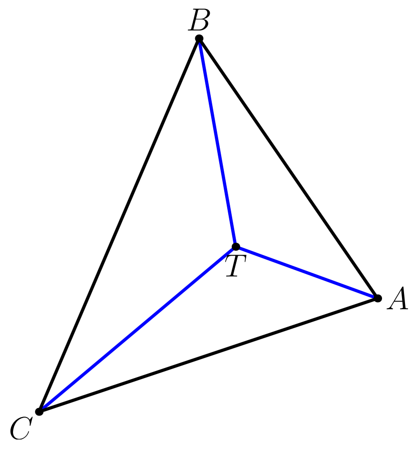
Решение. Если $ABCD$ — данный четырёхугольник, K — школа, то $KA+KC \geqslant AC$ и $KB+KD \geqslant BD$ (неравенство расстояний). То есть $KA+KB+KC+KD \geqslant AC+BD$. И этот минимум достигается, если и только если $K = [AC] \cap [BD]$. Поэтому ответ — строим в точке пересечения диагоналей $ABCD$.

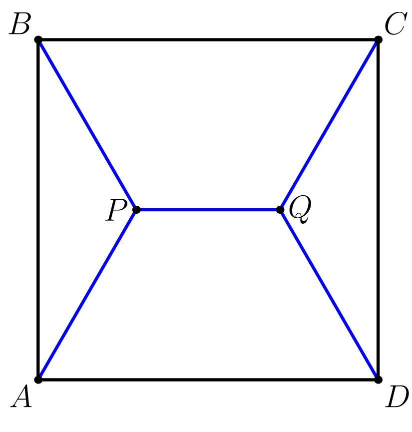
Задача. А что делать, если $ABCD$ — невыпуклый четырёхугольник? Оказывается, ответом будет вершина невыпуклого угла.

Решение. В самом деле, пусть D лежит внутри треугольника ABC, тогда четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый. Выберем точку A_1 на прямой (AD) так, чтобы $D \in [AA_1]$. Аналогично выберем точку B_1 на (BD) и C_1 на (CD).

Лучи $[DA_1)$, $[DB_1)$ и $[DC_1)$ разбивают плоскость на три угла, и если K в одном из них, скажем, внутри $\angle B_1DC_1$, то $KB + KC \geqslant DB + DC$ (неравенство резинки), равенство только при $K = D$, а кроме того, $KA + KD \geqslant AD$, равенство на отрезке $[AD]$. Итак, сумма всех четырёх расстояний не меньше чем $AD + DC + DB$, при $K = D$ эта оценка достигается.

Замечание. Если точек не четыре, а три, задача становится ещё труднее. Оказывается, если треугольник очень тупоугольный (тупой угол в 120° или более), школу следует строить в вершине этого угла, а иначе — в так называемой точке Торричелли. На рисунке показана точка Торричелли треугольника ABC. Синие отрезки сходятся в ней, образуя углы в 120°. Эванджелиста Торричелли — итальянский математик и механик, ученик Галилео Галилея.





Замечание. Можно поставить другую задачу — соединить дома дорогами так, чтобы их суммарная длина была минимальной. Это очень сложная задача (её поставил в XIX веке швейцарский математик Якоб Штейнер, а решил в достаточно общем виде в 1930 году чешский математик Войтех Ярник). Например, для вершин квадрата кажется, что дороги нужно проложить по диагоналям, но нет — есть более экономное решение — так называемая сеть Штейнера, см. правый рисунок. И здесь углы между отрезками равны 120°.

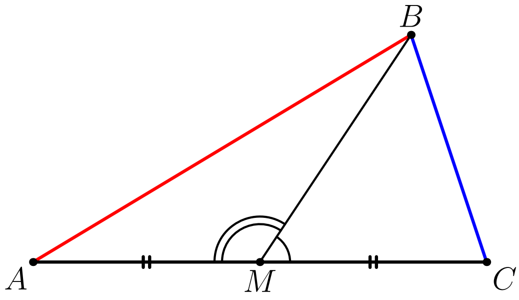
В домашней работе встретились внешне похожие задачи: о том, что сумма высот меньше периметра и что сумма медиан тоже. Давайте придумаем ещё одну задачу, похожую на эти две:))

Правильно: сумма биссектрисс треугольника меньше его периметра. Это так просто не доказывается:(, но тем не менее, это верно. И следует из одного важного факта.

Теорема. В неравнобедренном треугольнике биссектриса расположена между медианой и высотой.

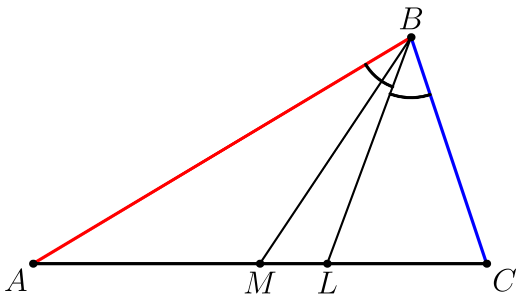
Доказательство проведём в несколько шагов.

Разберёмся в том, как расположены медиана и биссектриса в неравнобедренном треугольнике. Пусть в треугольнике ABC красная сторона AB длиннее синей стороны BC. Проведём медиану BM. Сделаем первое важное наблюдение: $\angle CMB$ — острый, а $\angle AMB$ — тупой.

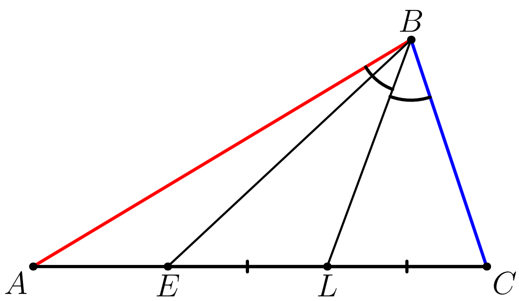


Почему так? Прямыми они быть не могут. Пусть наоборот, $\angle CMB$ — тупой, а $\angle AMB$ — острый. Но тогда $\angle CMB > \angle AMB$ и (у нас была такая задача в ДЗ) $CB > AB$, а это не так.

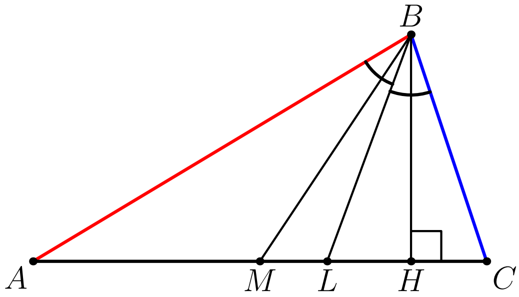
Вспомним ещё одну штуку с углами: мы доказывали, что угол $\angle ABM$ (прилежащий к длинной стороне) меньше угла $\angle BM$ (прилежащего к короткой). Посмотрев на чертёж с удвоением медианы, можно вспомнить, как это доказывается. Это значит (второе важное наблюдение), что биссектриса CL пройдёт ближе к короткой стороне, чем к длинной: точка L между M и C (а не между M и A). Или совсем кратко можно сказать так: $CL < AL$.



Уберём пока с чертежа медиану, оставим только биссектрису BL. Отметим на $[AL]$ точку E так, что $EL = LC$. Так можно сделать, потому что $AL > LC$. В треугольнике EBC BL будет медианой, а $\angle EBL < \angle CBL$ (потому что $\angle ABL = \angle CBL$). Опять применяем факт об углах между медианой и сторонами и получаем, что $BE > BC$. А это значит, что (третье важное наблюдение) $\angle CLB$ — острый, а $\angle ALB$ — тупой.



Вернём медиану на место и посмотрим на картину в целом. Угол $\angle CMB$, под которым из M видна короткая сторона, острый. Угол $\angle CLB$, под которым из L видна короткая сторона, больше предыдущего, но тоже острый. Поэтому высота BH падает на луч $[LC)$, а не на $[LA)$. (Она может попасть на отрезок $[LC]$, прямо в точку C или даже на продолжение стороны AC за C — это неважно. Всё равно L между M и H.)



<u>Следствие</u>. Биссектриса не длиннее медианы, проведённой к той же стороне.

<u>Следствие</u>. Сумма биссектрис треугольника короче его периметра.