7 класс, геометрия. Четырнадцатая неделя, 12-17 декабря.

Упражнение. Одна сторона треугольника равна 12, другая 5. Чему может быть равна самая короткая сторона этого треугольника? Самая длинная? Средняя по длине?

Упражнение. Одна сторона треугольника равна 4, а две другие относятся как $3:5$. В каких пределах может изменяться периметр треугольника?

Задача (важная). Внутри треугольника ABC расположена точка O. Докажите, что периметр треугольника AOC меньше периметра треугольника ABC.

Решение. Пусть $L=[AO)\cap[BC]$. $P_{ABC}=AB+BC+CA=(AB+BL)+LC+CA>AL+LC+CA=AO+(OL+LC)+CA>AO+OC+CA=P_{AOC}$.

Это неравенство можно представить себе так. Пусть треугольники начерчены на листе фанеры; вобьём гвоздики в точки A, B, C и O. Натянем резинку на гвоздики A, B, O. Теперь, чтобы натянуть её на A, B и C неминуемо нужно растянуть резинку, увеличив её длину. Иногда доказанное нами неравенство называют *неравенством резинки.*

Задача. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Докажите, что $AC+BD>AB+CD$.

Задача. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Докажите, что сумма его диагоналей больше половины периметра.

Половина периметра треугольника или четырёхугольника часто встречается в задачах. Для неё придумали специальное обозначение p и название ***полупериметр***.

Задача. Может ли сумма диагоналей четырёхугольника равняться 2 см, а его периметр быть больше чем 2 м?

Решение. Да. Рассмотрим отрезок $[AC]$ длиной 1 см, отметим его середину M и проведём серединный перпендикуляр. На нём отметим точки B и D так, что $MB=50$ см, $BD=1$ см и B между M и D. Тогда в $ABCD$ сумма диагоналей $AB+CD=2$ см, тогда как все стороны длиннее $MB=0,5$ м, и поэтому периметр превышает 2 м.

Задача. В треугольнике ABC провели ***чевиану*** BK, то есть соединили вершину B с произвольной точкой K на стороне AC. Докажите, что BK короче хотя бы одной из двух остальных сторон треугольника.

Задача. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ на основании отметили точку T. Докажите, что $AB>BT$.

Задача. Внутри треугольника ABC с периметром P отметили точку K. Докажите, что $AK+BK+CK>\frac{P}{2}$. (Смотрите: снова полупериметр!)

Задача. (Продолжение.) Докажите, что $AK+BK+CK<P$.