7 класс, геометрия. Тринадцатая неделя, 03-10 декабря.

Утверждение. Перпендикуляр короче наклонной.

Это то же самое, что «катет короче гипотенузы», но сформулировано в других терминах. Пусть из точки A опущен на прямую l перпендикуляр AH. Пусть точка $B \in l$ отлична от H. Тогда отрезок AB называют ***наклонной***. Разумеется, наклонных из точки к прямой можно провести сколько угодно, а перпендикуляр только один. Про точку H говорят *основание перпендикуляра*, про точку B — *основание наклонной*.

Следствие. В тупоугольном треугольнике сторона против тупого угла самая длинная.

Следствие. Наклонная тем длиннее, чем дальше её основание от основания перпендикуляра.

Задача. AL — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AB > BL$.

Теорема (неравенство треугольника). В любом треугольнике длина любой его стороны меньше суммы длин двух остальных сторон.

Первое доказательство. Пусть дан треугольник ABC, докажем, что $AC < AB + BC$. Для этого на луче $[AB)$ отметим такую точку D, что B лежит между A и D и $BD = BC$. `Этот приём -- "распрямление ломаной" -- стоит запомнить`. Теперь в треугольнике ADC сторона $AD = AB + BC$, и нам осталось показать, что $AD > AC$, то есть, что $\angle ACD > \angle ADC$. И это действительно так, потому что $\angle ADC = \angle BCD < \angle ACD$.

Второе доказательство. Проведём биссектрису BL треугольника и воспользуемся задачей, решённой в начале урока.

Следствие (неравенство расстояний). Для любых трех точек A, B, C справедливо неравенство $AB + BC \geqslant AC$, причём равенство имеет место если и только если $B \in [AC]$.

Следствие (неравенство ломаной). Для любых n точек A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n справедливо неравенство $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n$, причём равенство имеет место если и только если точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n лежат на одной прямой в указанном порядке.

Пусть для чисел x, y, z выполнено неравенство $x + y > z$. Можно ли утверждать, что существует треугольник с такими сторонами? Нет, нельзя, например $5 + 8 > 2$, однако треугольника со сторонами 5, 8 и 2 не бывает, потому что $5 + 2 < 8$. Можно ли утверждать, что треугольник со сторонами x, y, z существует, если мы проверили все три неравенства треугольника? Оказывается, да, но мы пока не умеем это строго доказывать. Заметим также, что если $x \leqslant y \leqslant z$, то достаточно проверить только одно неравенство, а именно $x + y > z$.

Задача. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AD и BC пересекаются в (единственной) точке O. Докажите, что O находится снаружи $ABCD$.