7 класс, геометрия. Двенадцатая неделя, 21-26 ноября.

Задача. Биссектриса AL делит треугольник ABC на два. Докажите, что в каждом из них $\angle A$ не наибольший.

Задача (важная). Внутри треугольника ABC взята точка K. Докажите, что $\angle AKB > \angle ACB$.

Первое решение. Проведём CK до пересечения со стороной AB в точке T. Тогда $\angle AKN > \angle ACB$ и $\angle NKB > \angle ACB$. Сложим эти неравенства и получим $\angle AKB > \angle ACB$.

Второе решение. Проведём AK до пересечения со стороной BC в точке T. Тогда $\angle AKB > \angle ATB > \angle ACB$.

Задача. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Пусть $O = [AN] \cap [CM]$. Докажите, что $\angle AMC + \angle ANC > \angle AOC$.

Задача (важная). Катет короче гипотенузы!

Таким же образом можно доказать и общую важную теорему.

Теорема. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла — бо́льшая сторона.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $AB < BC$. Отметим на $[BC]$ такую точку K, что $AB = BK$. Тогда $\angle CAB > \angle KAB = \angle AKB > \angle ACB$. Здесь первое неравенство справедливо потому, что угол больше его части, а второе — по теореме о внешнем угле. Равенство же — это свойство углов при основании равнобедренного треугольника. Итак, мы доказали, что против большей стороны лежит больший угол.

Докажем теперь обратное: если $\angle CAB > \angle ACB$, то $AB < BC$. В самом деле,если бы было $AB = BC$, то и $\angle CAB > \angle ACB$ был бы равен $\angle CAB > \angle ACB$, а это не так. Если бы $AB > BC$, то было бы $\angle CAB < \angle ACB$, а это и подавно не так. Значит, $AB < BC$.