7 класс, геометрия. Двенадцатая неделя, 21-26 ноября.

Задача (важная и непростая). Докажите, что если две высоты треугольника равны, то он равнобедренный.

Казалось бы, ничего сложного. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Тогда прямоугольные треугольники ACA_1 и CAC_1 равны по гипотенузе и катету, и поэтому $\angle ACA_1 = \angle CAC_1$. Ну а тогда треугольник равнобедренный, этот признак мы хорошо знаем.

Но вот нет. На самом деле всё дело в этих углах. Если они направлены в одну полуплоскость от (AC), то это либо углы нашего треугольника, либо смежные с ними. Второго варианта на самом деле не бывает, но нам это неважно — углы $\angle A$ и $\angle C$ нашего треугольника равны, значит он равнобедренный.

Плохо, если они они направлены в разные полуплоскости.

А вот такого точно не бывает, и это следует из очень важной теоремы. Прежде чем её сформулировать, дадим определение.

Определение. Угол, смежный с одним из углов треугольника, называется ***внешним углом*** этого треугольника. Всего у треугольника три пары равных между собой внешних углов.

А вот и **теорема**. Внешний угол треугольника больше любого не смежного с ним угла этого треугольника.

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC. Ометим на $[AB)$ точку K так, что $AK > AB$. Покажем, что $\angle KBC > \angle ACB$. Для этого рассмотрим медиану AM и продлим её так, что M — середина $[AN]$. Очевидно, что $[BN)$ проходит внутри $\angle KBC$, поэтому $\angle KBC > \angle NBC = \angle ACB$. Последнее равенство — известно свойство параллелограмма $ABNC$.

Задача (важная). Сумма двух углов треугольника меньше $180°$.

Теперь пришло время доказать тот признак равенства прямоугольных треугольников, который нам оставался.

Признак равенства по катету и противолежащему острому углу. Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему острому углу другого прямоугольного треугольника, такие треугольники равны.

Предположим, что у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (прямые углы C) равны катеты $AC = A_1C_1$ и углы $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Если $B_1C_1 = BC$, то треугольники равны по двум катетам. Если нет, то без ограничения общности пусть $B_1C_1 > BC$. Отметим тогда $B_2 \in [B_1C_1]$ так, что $C_1B_2 = CB$. Тогда $\triangle ABC \overset{I}{=} \triangle A_1B_2C_1$. То есть, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = \angle A_1B_2C_1$. А это противоречит теореме о внешнем угле, должно быть $\angle A_1B_1C_1 < \angle A_1B_2C_1$.

В домашнем задании была задача №2, это важное свойство биссектрисы угла. Запишем его.

Теорема. Биссектриса угла — геометрическое место точек, лежащих внутри угла и равноудалённых от его сторон.

Доказательство мы провели в упрощающем предположении, что перпендикуляры из точки падают на сторону угла, а не на дополнительный к ней луч, что в принципе возможно. Мы потом увидим, что равенства расстояний в такой конфигурации быть не может.