7 класс, геометрия. Одиннадцатая неделя, 14-19 ноября.

Определение. Треугольник, у которого один из углов прямой, назывется ***прямоугольным***. Сторона, противолежащая прямому углу, называется ***гипотенузой***, стороны, прилежащие к прямому углу, — ***катетами***. В прямоугольном треугольнике ABC традиционно принято, чтобы прямым углом был $\angle C$.

Задача. Докажите, у прямоугольного треугольника только один прямой угол, а два остальных угла острые.

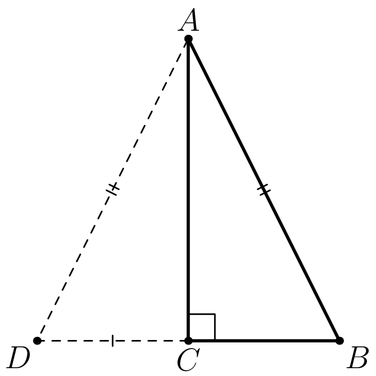
Для прямоугольных треугольников применяются обычные признаки равенства, но есть и "свои собственные".

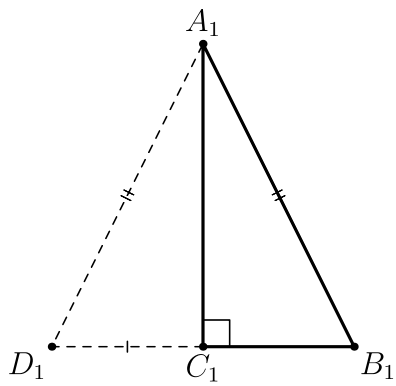
Признак равенства по двум катетам. Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, такие треугольники равны.

Этот признак здесь только для коллекции – по сути это просто первый признак равенства треугольников, и в специальном доказательстве он не нуждается.

Признак равенства по гипотенузе и катету. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, такие треугольники равны.

Вот это уже содержательный специфический признак. Докажем его. Пусть даны два прямоугольных треугольника, ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны гипотенузы $AB = A_1B_1$ и катеты $BC = B_1C_1$. Удлиним эти равные катеты (см. рис) – пусть C – середина BD и C_1 – середина B_1D_1. Тогда треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равнобедренные (высота = медиана), так что $\triangle ABD \overset{III}{=} \triangle A_1B_1D_1$, откуда $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, а тогда $\triangle ABC \overset{I}{=} \triangle A_1B_1C_1$.





Признак равенства по гипотенузе и острому углу. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, такие треугольники равны.

Этот признак доказывается примерно так же (сделайте самостоятельно).

Признак равенства по катету и острому углу. Если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, такие треугольники равны.

Понятно, что у этого признака два варианта — острый угол может прилежать к катету или противолежать ему. Первый случай — это просто общий второй признак, поэтому доказывать по сути надо только второй случай. И это, к сожалению, не так просто, как предыдущие два.

Задача. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из концов стороны треугольника на прямую, содержащую медиану к этой стороне, равны.

Задача. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из концов стороны треугольника на прямую, проходящую через середины двух других сторон, равны.

Задача (важная и совсем простая). Докажите, что у равнобедренного треугольника высоты к боковым сторонам равны.

Ну простая-то простая, но всё же надо понять, куда падают высоты. Если у нас треугольник ABC с основанием AC, то высота AH может попасть на сторону BC, может на её продолжение за точку B (и на самом деле нам не важно, какой из этих вариантов имеет место), но не может – на продолжение за точку C. Потому что тогда бы у прямоугольного треугольника AHC был бы тупой угол (а мы доказали ранее, что у прямоугольного треугольника один прямой угол и два острых). Кстати, а почему у равнобедренного треугольника углы при основании острые? А всё потому же – проводим главную высоту и говорм об углах прямоугольного треугольника.
Это ещё одно свойство равнобедренного треугольника.

А теперь по традиции сделаем из свойства признак.

Задача (важная и непростая). Докажите, что если две высоты треугольника равны, то он равнобедренный.

Казалось бы, ничего сложного. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Тогда прямоугольные треугольники ACA_1 и CAC_1 равны по гипотенузе и катету, и поэтому $\angle ACA_1 = \angle CAC_1$. Ну а тогда треугольник равнобедренный, этот признак мы хорошо знаем.

Но вот нет.