7 класс, геометрия. Десятая неделя, 07-12 ноября.

Задача. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = AD$ и $BC = DC$. Докажите, что это дельтоид.

Задача. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите, что это параллелограмм.

При решении задач естественно предполагать выпуклость четырёхугольников. На самом деле при решении первой задачи выпуклость никак не используется (и дельтоид запросто может быть невыпуклым), а вот в условиях второй задачи четырёхугольник обязан быть выпуклым. Это будет доказано в домашней работе.

Решим важную задачу.

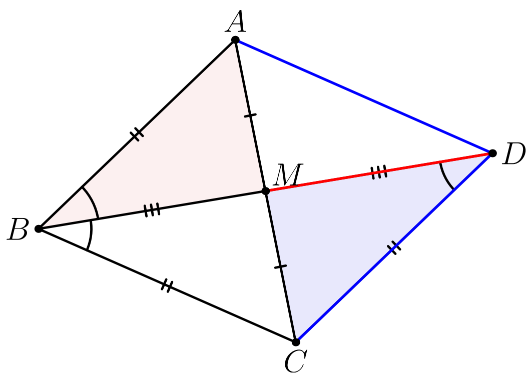
Признак равнобедренной трапеции. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $\angle A = \angle D$. Докажите, что это равнобедренная трапеция (формально надо добавить $AD \neq BC$, чтобы она не оказалась прямоугольником).

Мы без труда доказали, что если у треугольника высота совпадает с биссектрисой или с медианой, то он равнобедренный. А вот доказать то же про треугольник, у которого биссектриса совпадает с медианой, так просто не получается. И тем не менее это верно.

Задача (важная). Докажите, что если у треугольника биссектриса является медианой, то он равнобедренный.

Решение основано на важном и красивом дополнительном построении, который обычно называют ***удвоением медианы***. Оно состоит в том, что медиану AM треугольника ABC продлевают на её длину, отмечая на луче $[AM)$ точку D так, что $AD = 2AM$. Коротко можно записать появление этой точки так: "построим D так, что M — середина $[AD]$". *Запомните этот приём!*

Итак, решение. Пусть BM — биссектриса и высота треугольника ABC. Продлим её: пусть M — середина BD. Тогда $ABCD$ — параллелограмм по определению. По одному из свойств параллелограмма $\angle CDM = \angle ABM$, но BM — биссектриса, так что $\angle CDM = \angle ABM = \angle BM$, что означает, что треугольник BCD равнобедренный, $BC = CD$. Но по ещё одному свойству параллелограмма $AB = CD$, так что $AB = BC$.



Задача (важная). Докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

Задача. В треугольнике ABC, у которого $\angle A + \angle B = \angle C$, проведена медиана CM. Докажите, что $CM = \frac{1}{2}AB$.