7 математический класс, геометрия. Первая неделя, 01 – 03 сентября.

Мы приступаем к изучению геометрии, интересного и красивого раздела математики. Надеюсь, что наши занятия пройдут с пользой и удовольствием!

Геометрия (от греческих корней со значениями «Земля» и «измерять») — учение о свойствах фигур. Человечество накапливало геометрические знания в течение всей своей истории, но геометрия как наука оформилась примерно две с половиной тысячи лет назад в Древней Греции. Геометрия (вместе с арифметикой, астрономией и музыкой) входила в Квадривиум — четвёрку наук, лишь познав которые, полагалось приступать к изучению Философии. По легенде над Академией Платона красовалась надпись, запрещающая вход туда не знающим геометрии. Попытаемся приложить усилия в течении этого года, чтобы нас с вами туда пустили (хотя бы на порог):)

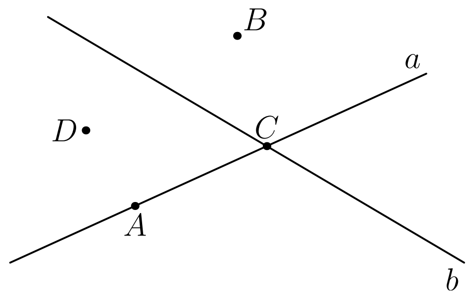
Древнегреческий математик Евклид, живший в III В до н. э., создал выдающийся труд, где изложил геометрические (и другие математические) знания, накопленные греческими математиками и их предшественниками. Эта книга, называющаяся «Начала» (лат. *Elementa*) сохранившаяся в нескольких списках и переводах, в течении более чем 2000 лет служила учебником математики, многократно переводилась, улучшалась, комментировалась. По количеству изданий она уступает только Библии. Говорят, что царь Птолемей, желая «по-быстрому» изучить Геометрию, призвал к себе Евклида и спросил, как это можно сделать. Евклид будто бы ответил на это «Нет царского пути в Геометрию!» Это, скорее всего, лишь красивая легенда, но простого пути в геометрию действительно нет. Нам придётся идти туда длинной и трудной дорогой. Надеюсь, что мы её осилим!

Евклид строит геометрию дедуктивно (лат. *deductio* – выведение), постепенно выводя одни положения этой науки из уже доказанных. (Вспомните знаменитого сыщика, блестяще владевшего **дедукцией** – умением делать выводы!)

Геометрия, как и всякая наука, начинается с определений. Но на пустом месте определения давать нельзя — что-то можно определить только через что-то другое. Поэтому в основе геометрии лежат **неопределяемые понятия**. Назовём важнейшие из них для нас сейчас – **точка**, **прямая** и **плоскость**.

Точку принято представлять себе, как что-то малое, типа песчинки, не имеющее размеров (точнее, чьми размерами мы пренебрегаем). Представление о **прямой** может дать натянутая в воздухе нить или линия сгиба листа бумаги. Сам лист бумаги служит неплохой моделью **плоскости**, так же как и поверхность стола или классной доски или водная гладь в безветренный день. Более подробно об этом вы можете прочесть в учебнике геометрии. Важно помнить, что мы лишь как-то представляем себе эти понятия — возможно, инопланетянин думает о точках и прямых совсем иначе. Но если его точки и прямые будут иметь те же свойства, что и «наши» – мы сможем с ним поговорить (о геометрии ;-)

Договоримся об обозначениях. Точки и прямые мы будем рисовать на бумаге, которая будет у нас изображать плоскость (мы пока ограничимся одной плоскостью). Каждая точка получит имя – заглавную латинскую букву. Прямые мы будем тоже обозначать латинскими буквами – но строчными, маленькими. На рисунке изображены несколько точек и прямых.



Некоторые точки и прямые на рисунке находятся в особом отношении, которое обозначается словами **принадлежать** или **содержать**. Так точка A принадлежит прямой a; также можно сказать, что прямая a содержит точку A. Это пишут с помощью специального символа похожего на букву «э»: $A \in a$. Надеюсь, что запись $B \notin a$ тоже всем понятна. Понятие **принадлежать** тоже относится к неопределяемым.

Перейдём к свойствам прямых и точек. Эти свойства тоже вытекают друг из друга, и поэтому какие-то надо положить в основу всей теории. Они называются **аксиомами** (греч. $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ – «несомненная») и их принимают без доказательства. Мы будем знакомиться с аксиомами постепенно, не со всеми сразу. Из аксиом выводятся следствия, которые Евклид называл **положениями** (лат. *proposition* – положение), сейчас более принято говорить **«утверждение»**. Самые яркие, важные и красивые утверждения называют **теоремами** (греч. $\theta\epsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$ – «рассмотренная»).

Первая аксиома прямой. Для всякой прямой найдётся точка, принадлежащая ей и точка, не принадлежащая ей.

Вторая аксиома прямой. Для любых двух точек существует и единственна прямая, содержащая их.

Конструкции «существует» и «для любого» так часто употребляются в математике, что для них тоже придумали специальные обозначения – *кванторы.*

Квантор всеобщности пишется $\forall$ и читается «для всех» или «для любого». Перевёрнутая буква А должна напоминать английское слово *All* («все»).

Квантор существования пишется $\exists$ и читается «существует». Перевёрнутая буква Е должна напоминать английское слово *Exists* («существует»). У него есть также вариант $\exists!$ – «существует и единственен». А вот так $\nexists$ пишут слова «не существует».

Наконец, двоеточие $:$ читается «такой, что», «такие, что».

С помощью кванторов запишем аксиомы короче:

Первая аксиома прямой. $\forall a \ \ \exists A \in a$ и $B \notin a$.

Вторая аксиома прямой. $\forall A, B \ \exists! \ a \ : \ A \in a$ и $B \in a$.

Вторая аксиома позволяет обозначить прямую по-другому: раз две точки, A и B, определяют ровно одну прямую a, можно обозначить $a = (AB)$.

Утверждение. Две прямые могут пересекаться не более чем в одной точке.

Определение. Прямые, не имеющие общих точек, называются **параллельными**. (Ещё раз подчеркнём, что мы договорились, что все точки и прямые лежат в одной плоскости. Для прямых в пространстве это определение не годится.) Пишут $a||b$.

Упражнение. Запишите символами это определение.

Задача. Через точку проведена прямая. Докажите, что через эту точку можно провести ещё одну прямую.

Вопрос. А можно ли провести ещё две прямые? `[Попытки учеников доказать это провалятся. На самом деле это доказать нельзя. Потому что существует «геометрия», в которой всего три точки и три прямые -- пары этих точек. На самом деле, конечно, через точку можно провести сколько угодно прямых -- но для этого нужны ещё аксиомы! Этих двух недостаточно.]`

Для следующей аксиомы нам понадобится (неопределяемое) понятие *лежать между* — про три точки A, B, C одной прямой мы можем сказать, например, что B лежит между A и C.

Определение. Множество точек, лежащих между A и B, называется **отрезком** с концами A и B. Считается, что концы отрезка также ему принадлежат. Отрезок принято обозначать $[AB]$.

Третья аксиома прямой. Для любых трёх точек прямой ровно одна точка лежит между двумя другими.

Четвёртая аксиома прямой. Прямая разбивает плоскость на две части (**полуплоскости**). При этом если точки A и B лежат в одной полуплоскости, отрезок $[AB]$ не пересекает прямую, а если в разных, то пересекает. Считают, что сама прямая не относится ни к одной из полуплоскостей.

Теорема. (Аксиома Паша.) Пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой. Пусть прямая a не содержит C и пересекает $[AB]$. Тогда она пересекает ровно один из отрезков $[BC]$ и $[AC]$. `[Доказательство основано на применении 4-й аксиомы. Мориц Паш (1843 - 1930) -- немецкий математик.]`

Подобно тому как прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, точка разбивает прямую на две полупрямых. Полупрямые принято называть **лучами**, а точку — **началом** каждого из них. Пусть $A, B \in a$. С помощью понятия «лежать между», можно описать, из каких точек состоит луч с началом в A и содержащий B. Это точки A, B, точки, лежащие между A и Bа также такие точек M, что B лежит между A и M. Определение можно записать короче с помощью некоторой хитрости, вот так:

Определение. Луч $[AB)$ – множество таких точек $M \in (AB)$, что A **не лежит между** M и B.

Этот луч обозначается $[AB)$. Скобки показывают, где у него начало, и не дают перепутать луч с прямой или отрезком.