

7 математический класс 1543  
16 февраля 2023

1 При проверке ваших примеров были пойманы два крокодила. Разложите их на множители. (Владельцам крокодилов просьба не спойлерить ответы своим товарищам.)

a

$$4x^5y^8 + 4x^3y^{10} - 12x^7y^5 - 4x^6y^6 - 14x^5y^7 - 4x^4y^8 - 2x^3y^9 + 6x^7y^4 + 2x^6y^5 + 6x^5y^6 + 2x^4y^7 + \\ + 2x^4y^4 + 2x^2y^6 - 6x^6y - 2x^5y^2 - 7x^4y^3 - 2x^3y^4 - x^2y^5 + 3x^6 + 3x^4y^2 + x^3y + xy^3$$

b

$$a^3g^2 + brat^3 - 2a^3ge - t^3era + a^3e^2 + grat^3 - a^3b^2 - t^3b^2 + a^4gr + t^3e^2 - a^4er - 2t^3ge + a^4br + t^3g^2$$

2 a Докажите формулу разности  $n$ -ных степеней:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

b Докажите, что для нечётного  $n$  верна формула

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Очень полезны следующие частные случаи этих формул:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) \\ a^{2k+1} + 1 = (a + 1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \dots + a^2 - a + 1)$$

3 Разложите на множители

a  $64x^6 - 729y^{12}$ ;    b  $x^5 - x^3 - y^3 + y^5$ ;

4 a Докажите, что  $53^{70} - 3^{70}$  делится на 50.

b Докажите, что  $43^{2023} + 23^{2023}$  делится на 66.

c Докажите, что  $21^{10} - 1$  делится на 200.

5 Упростите суммы:

a  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{1543}$ ;

b  $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{2022}$ ;

c  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$ ;

d  $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{5^{666}}$ ;

e  $3^{1000} - 2 \cdot 3^{999} + 2^2 \cdot 3^{998} - \dots - 2^{999} \cdot 3 + 2^{1000}$

6 Докажите, что  $x^{100} - 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot P$ , где  $P$  — какой-то многочлен.

7 Разложите на множители  $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ .

8\* a Разложите на множители  $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ .

b Докажите, что для некоторого многочлена  $Q$  выполняется равенство

$$(x + y + z)^{1543} - x^{1543} - y^{1543} - z^{1543} = ((x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3) \cdot Q$$