Математическая вертикаль
Как использовать формулы сокращенного умножения

Мы успели выучить две формулы сокращенного умножения: **формулу разности квадратов**

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

и **формулу квадрата суммы (разности)**

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Формулу разности квадратов бывает полезно читать в обе стороны. Чтение слева направо позволяет быстро перемножать некоторые числа или многочлены.

- $91\cdot 109=(100-9)(100+9)=100^2-9^2=10000-81=9919.$
- $\left(1{,}3a^7b-\dfrac{2}{11}b^4c^3\right)\left(1{,}3a^7b+\dfrac{2}{11}b^4c^3\right)=(1{,}3a^7b)^2-\left(\dfrac{2}{11}b^4c^3\right)^2=1{,}69a^{14}b^2-\dfrac{4}{121}b^8c^6.$

Если мы перемножаем два многочлена, состоящие из одних и тех же одночленов, но с разными знаками — формула разности квадратов нам тоже поможет.

- $(a-b+c)(a+b+c)=((a+c)-b)((a+c)+b)=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2.$
- $(x^2-3y+4z^5)(x^2+3y-4z^5)=(x^2-(3y-4z^5))(x^2+(3y-4z^5))=$
$=(x^2)^2-(3y-4z^5)^2=x^4-(9y^2-24yz^5+16z^{10})=x^4-9y^2+24yz^5-16z^{10}.$

Чтение формулы разности квадратов справа налево позволяет раскладывать на множители числа и многочлены.

- $2491=2500-9=50^2-3^2=(50-3)(50+3)=47\cdot 53.$
- $2{,}25x^4-\dfrac{9}{64}y^2z^8=(1{,}5x^2)^2-\left(\dfrac{3}{8}yz^4\right)^2=\left(1{,}5x^2-\dfrac{3}{8}yz^4\right)\left(1{,}5x^2+\dfrac{3}{8}yz^4\right).$
- $49x^2-9y^2-14x-6y=(7x-3y)(7x+3y)-2(7x+3y)=(7x+3y)(7x-3y-2).$

Формулу квадрата суммы можно читать слева направо. Это помогает быстро возводить в квадрат числа и многочлены.

- $197^2=(200-3)^2=200^2-2\cdot 200\cdot 3+3^2=40000-1200+9=38809.$
- $(7x^3+4yz)^2=(7x^3)^2+2\cdot(7x^3)(4yz)+(4yz)^2=49x^6+56x^3yz+16y^2z^2.$

Если хочется возвести в квадрат сумму большего числа одночленов, то формулу квадрата суммы нужно применить несколько раз.

- $(3a-b-2c)^2=(3a-(b+2c))^2=(3a)^2-2\cdot 3a\cdot(b+2c)+(b+2c)^2=9a^2-6ab-12ac+b^2+4bc+4c^2.$
- $(x+y+z+w)^2=((x+y)+(z+w))^2=(x+y)^2+2(x+y)(z+w)+(z+w)^2=$
$=x^2+2xy+y^2+2xz+2xw+2yz+2yw+z^2+2zw+w^2.$

Если читать формулу квадрата суммы справа налево, то можно увидеть, что некоторые выражения являются квадратами.

- $49a^4+56a^2b+16b^2=(7a^2)^2+2\cdot(7a^2)\cdot(4b)+(4b)^2=(7a^2+4b)^2.$
- $2{,}89x^2y^{12}-\dfrac{17}{45}xy^6+\dfrac{1}{81}=(1{,}7xy^6)^2-2\cdot 1{,}7xy^6\cdot\dfrac{1}{9}+\left(\dfrac{1}{9}\right)^2=\left(1{,}7xy^6-\dfrac{1}{9}\right)^2.$

Правильным образом комбинируя эти две формулы, можно раскладывать на множители довольно сложные многочлены:

- $36x^4 - 9x^2 + 6x - 1 = 36x^4 - (9x^2 - 6x + 1) = (6x^2)^2 - (3x - 1)^2 = (6x^2 - 3x + 1)(6x^2 + 3x - 1).$
- $25x^2y^2 + 20xy - x^2 - 8x - 12 = (25x^2y^2 + 20xy + 4) - (x^2 + 8x + 16) = (5xy + 2)^2 - (x + 4)^2 =$
$= (5xy + 2 - x - 4)(5xy + 2 + x + 4) = (5xy - x - 2)(5xy + x + 6).$

Очень важно научиться **выделять полный квадрат** из квадратного трёхчлена. Иными словами, записывать трёхчлен в виде «квадрат какого-то выражения плюс число». Для этого надо представить один одночлен в виде «квадрата первого», а другой в виде «удвоенного произведения первого на второе».

Подробно разберем на примере, как это делается. Пусть дан трёхчлен

$$16x^2 + 72x - 7.$$

Понятно, что $16x^2 = (4x)^2$. Значит, «первое» — это $4x$. Теперь представим $72x$ как $2 \cdot 4x \cdot 9$.

$$16x^2 + 72x - 7 = (4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot 9 - 7.$$

Получается, что «второе» — это 9. Добавим и отнимем квадрат второго (то есть 81):

$$16x^2 + 72x - 7 = (4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot 9 - 7 = ((4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot 9 + 9^2) - 81 - 7.$$

Теперь запишем выражение в скобках в виде квадрата суммы

$$16x^2 + 72x - 7 = (4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot 9 - 7 = ((4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot 9 + 9^2) - 81 - 7 = (4x + 9)^2 - 88,$$

и мы добились желаемого.

Разберем ещё несколько примеров.

- $25x^2 - 10x - 3 = (5x)^2 - 2 \cdot (5x) \cdot 1 - 3 = ((5x)^2 - 2 \cdot (5x) \cdot 1 + 1^2) - 1 - 3 = (5x - 1)^2 - 4.$
- $x^2 - 7x + 5 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 5 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}.$
- $81x^2 + 7x + 4 = (9x)^2 + 2 \cdot (9x) \cdot \frac{7}{18} + \left(\frac{7}{18}\right)^2 - \frac{49}{324} + 4 = \left(9x + \frac{7}{18}\right)^2 + 3\frac{275}{324}.$

Выделяя полные квадраты, можно решать квадратные уравнения.

$$49x^2 - 56x - 33 = 0$$
$$(7x)^2 - 2 \cdot (7x) \cdot 4 + 4^2 - 16 - 33 = 0$$
$$(7x - 4)^2 - 49 = 0$$
$$(7x - 4 - 7)(7x - 4 + 7) = 0$$
$$(7x - 11)(7x + 3) = 0$$
$$x = \frac{11}{7} \text{ или } x = -\frac{3}{7}$$

Еще бывают уравнения, которые можно преобразовать к виду «сумма нескольких квадратов равна нулю».

$$13x^2 + 12xy + 4y^2 - 12x + 9 = 0$$
$$(9x^2 + 12xy + 4y^2) + (4x^2 - 12x + 9) = 0$$
$$(3x + 2y)^2 + (2x - 3)^2 = 0$$

Квадрат не может быть отрицательным числом. Поэтому, если сумма двух квадратов равна нулю, то каждый из квадратов должен быть равен нулю.

$$3x + 2y = 0 \text{ и } 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{3}{2} \text{ и } y = -\frac{3}{2}x = -\frac{9}{4}$$