7 математический класс 1543
1 сентября 2022

Древние египтяне использовали при счёте только дроби, числитель которых равен 1 (сейчас такие дроби называются **аликвотными**). Остальные дроби они представляли в виде суммы различных аликвотных дробей.

1 a Вычислите $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

b В **математическом папирусе Ахмеса** есть такая задача: «Разделить 7 хлебов поровну между 8 людьми». Как бы решали эту задачу вы?

c А как решали её древние египтяне?

d Подумайте, как бы в Древнем Египте делили 13 хлебов поровну между 12 людьми.

2 Вычислите: a $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$; b $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{16}$; c $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$; d $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{42}$.

3 Представьте дробь в виде суммы двух различных дробей с числителем 1:
a $\frac{3}{4}$; b $\frac{1}{2}$; c $\frac{5}{36}$; d $\frac{1}{5}$.

4 Представьте единицу в виде суммы a трёх; b четырёх различных дробей с числителем 1.

5 a Представьте каждое слагаемое в виде разности двух дробей с числителем 1 и вычислите

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10};$$

b Вычислите

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{1541\cdot 1543};$$

c* Докажите, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots+\frac{1}{2021\cdot 2022\cdot 2023}<\frac{1}{4}$$

6 Покажите, что любую аликвотную дробь можно представить в виде суммы двух различных аликвотных дробей.

7 Можно ли представить единицу в виде суммы семи различных аликвотных дробей?

8* Покажите, что любую правильную дробь можно представить в виде суммы нескольких различных аликвотных дробей.

9* Жадине-Говядине нужно представить правильную дробь $\frac{m}{n}$ в виде суммы различных аликвотных дробей. Он действует следующим образом: берет самую большую аликвотную дробь, не превосходящую $\frac{m}{n}$. Затем он добавляет к ней наибольшую возможную аликвотную дробь так, чтобы их сумма не превосходила $\frac{m}{n}$. Потом он опять прибавляет к сумме наибольшую возможную аликвотную дробь. И так далее, пока сумма не станет равна $\frac{m}{n}$.

a Проделайте этот алгоритм для дробей $\frac{7}{11}$ и $\frac{15}{43}$.

b Всегда ли этот алгоритм приведет Жадину-Говядину к желаемому результату?