

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 9

20 ноября 2021

Остатки

Разделить целое число a на $b \neq 0$ с остатком — это представить a в виде $a = bk + r$, где $0 \leq r < |b|$. Число k называется (**неполным**) **частным**, а число r — **остатком**. Часто говорят, что число a даёт остаток r **по модулю** b .

0 **a** Какие остатки могут давать квадраты целых чисел по модулям 3, 4, 8?

b Незнайка придумал два натуральных числа, возвёл каждое из них в квадрат и результаты сложил. Получилось 1543. Докажите, что Незнайка где-то ошибся.

1 Разделите с остатком: **a** 34 на 6; **b** -34 на 6; **c** 34 на -6 ;
d -34 на -6 . (Все пункты этой задачи сдаются вместе.)

2 Какое-то число при делении на 85 даёт остаток 34. Делится ли это число на 17? на 5?

3 Найдите все натуральные числа, которые при делении на 17 дают остаток, равный квадрату частного.

4 Найдите наименьшее число (отличное от единицы), которое даёт остаток 1 при делении на 2, на 3, на 5 и на 7.

5 Найдите последнюю цифру числа $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 1542 \cdot 1543$.

6 Сумма 1543 натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма кубов этих чисел тоже делится на 6.

7 У Ивана-царевича есть два волшебных меча. Первым он может отрубить Змею Горынычу 21 голову. Вторым — 3 головы, но при этом у Змея Горыныча отрастает 1543 головы. Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов? (Если, например, у Змея Горыныча осталось лишь две головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя.)

8 Известно, что $a^2 + b^2$ (здесь a и b — какие-то натуральные числа) делится на 21. Докажите, что это число делится и на 441.

9 На доске было написано число из нескольких семёрок: $777 \dots 77$. Влад стёр у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стёртую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию, и так далее. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.