

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 8

13 ноября 2021

Делимость

Целое число a **делится** на целое число $b \neq 0$, если существует такое целое c , что $a = bc$. Это записывают как $a : b$.

Свойства делимости:

1. Если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$ (транзитивность).
2. Если $a : c$ и $b : c$, то $(a + b) : c$ и $(a - b) : c$.
3. Если $a : c$, то $ab : c$.
4. Если $a \neq 0$, то $b : c$ равносильно $ab : ac$.

Основная теорема арифметики: любое число единственным образом представляется в виде произведения простых множителей.

0 Вспомните признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 25, 3, 9, 11.

1 **a** Делится ли 0 на 0?

b Докажите свойства делимости из вступления, используя определение делимости.

2 Докажите, что произведение любых пяти подряд идущих натуральных чисел делится **a** на 30; **b** на 120.

3 Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может написать 300-значное число, состоящее из 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, и это число является точным квадратом. Не приукрашивает ли барон?

4 Можно ли составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (использованных по одному разу) шестизначное число, которое делится на 11?

5 Докажите, что ПУШКИН делится на 91 тогда и только тогда, когда ПУШ – КИН делится на 91.

6 Найдите все решения ребуса $\text{БРЕГ} \times \text{ГЕРБ} = \underbrace{\text{*****}}_5 000$ (разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми — одинаковые).

7 **a** На сколько нулей оканчивается $43!$?

b Докажите, что $43!$ не является точным квадратом. На какой наибольший квадрат оно делится?

8 В каждую клетку таблицы 100×100 записали по ненулевой цифре. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали в строках таблицы, делятся на 11. Могло ли так получиться, что из ста стозначных чисел, записанных по вертикали в столбцах таблицы, ровно 99 делятся на 11?