

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 6

16 октября 2021

Графы-2

Определение 1. *Путь* в графе — это последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром. *Цикл* — это замкнутый путь, проходящий по каждому ребру не более одного раза.

Определение 2. Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует как минимум один путь. Связные части, на которые распадается граф, называются *компонентами связности*.

Определение 3. Связный граф, в котором нет циклов, называется *деревом*.

0 **a** Докажите, что в дереве обязательно есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (она называется *висячей вершиной*).

b Докажите, что таких вершин как минимум две.

c Докажите, что рёбер в дереве на 1 меньше, чем вершин.

d На доске нарисован связный граф. Докажите, что в нём можно стереть некоторые рёбра так, чтобы осталось дерево (оно будет называться *остовным деревом* данного графа).

e Докажите, что в связном графе с n вершинами не меньше $n - 1$ ребра.

1 В графе 13 вершин, степень каждой из них не меньше 6. Докажите, что граф связан.

2 **a** В стране 15 городов. Министерство транспорта хочет открыть несколько авиалиний так, чтобы из любого города можно было добраться до любого другого. Какое наименьшее число авиалиний потребуется?

b Как изменится ответ, если дополнительно потребовать, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, сделав не более двух пересадок?

3 В секцию по настольному теннису ходит от 30 до 40 человек. Однажды в этой секции устроили турнир, на котором каждая девочка сыграла против 5 мальчиков, а каждый мальчик — против 7 девочек. Сколько девочек и сколько мальчиков занимается в этой секции?

4 На занятии по спецкурсу семиклассников связали друг с другом верёвками (каждая верёвка одним концом привязана к одному школьнику, а другим — к другому) таким образом, чтобы сбежать с урока они могли только всей группой сразу. К каждому семикласснику привязано ровно 6 верёвок. Одну из верёвок школьникам удалось перегрызть. Докажите, что они по-прежнему могут сбежать только все вместе.

5 Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 40×700 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

6 В дереве есть 10 вершин степени 3, 15 вершин степени 4, а остальные вершины висят. Сколько их?

7 После уроков каждый школьник кинул в одного из других снежком, и в каждого школьника кто-то кинул снежком. Докажите, что их можно разбить на 3 команды так, чтобы в каждой команде никто ни в кого не кидал.

8 В некоторой стране каждые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от каждого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;

6 В дереве есть 10 вершин степени 3, 15 вершин степени 4, а остальные вершины висят. Сколько их?

7 После уроков каждый школьник кинул в одного из других снежком, и в каждого школьника кто-то кинул снежком. Докажите, что их можно разбить на 3 команды так, чтобы в каждой команде никто ни в кого не кидал.

8 В некоторой стране каждые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от каждого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;

6 В дереве есть 10 вершин степени 3, 15 вершин степени 4, а остальные вершины висят. Сколько их?

7 После уроков каждый школьник кинул в одного из других снежком, и в каждого школьника кто-то кинул снежком. Докажите, что их можно разбить на 3 команды так, чтобы в каждой команде никто ни в кого не кидал.

8 В некоторой стране каждые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от каждого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;

6 В дереве есть 10 вершин степени 3, 15 вершин степени 4, а остальные вершины висят. Сколько их?

7 После уроков каждый школьник кинул в одного из других снежком, и в каждого школьника кто-то кинул снежком. Докажите, что их можно разбить на 3 команды так, чтобы в каждой команде никто ни в кого не кидал.

8 В некоторой стране каждые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от каждого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;