

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 5

9 октября 2021

Графы-1

Определение. *Графом* называется множество точек — *вершин*, соединённых линиями — *рёбрами*.

Определение. *Степенью вершины* называется количество рёбер, выходящих из этой вершины.

0 **a** Во дворе стоят 11 берёз и 8 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые верёвки так, что к каждому столбу привязано 7 верёвок, а к каждой берёзе — 4. Сколько во дворе бельевых верёвок?

b А может ли быть такое, что к каждому столбу привязано 6 верёвок, а к каждой берёзе — 5?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

1 Семь человек играли в шахматы. Известно, что Аня сыграла шесть партий, Боря — пять, Вера и Гоша — по три, Денис и Ева — по две, Женя — одну. Кто с кем сыграл? Любая пара ребят играла не более одного раза.

2 На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число покрашенных соседей?

3 Могут ли степени вершин в графе быть равны: **a** 5, 2, 3, 1, 3?

b 3, 4, 5, 1, 2, 2, 2? **c** 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6? **d** 8, 8, 8, 6, 5, 4, 2, 2, 1?

4 На карантине жители города N, сидя дома по одному, созванивались по скайпу. Вечером спецслужбы посчитали, что каждый из жителей разговаривал по скайпу 3 раза. Могло ли получиться, что общее число созвонов по скайпу в этом городе за день равно 2021?

5 На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты — соседи, если они касаются друг друга).

6 В одной стране некоторые города связаны друг с другом авиалиниями. Из столицы выходит 43 авиалинии, из города Дальнего — одна, из всех остальных городов — по 10 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (возможно, с пересадками).

7 Однажды в школе устроили однокруговой (каждая команда играет с каждой) турнир по шашкам на 17 команд. Докажите, что в любой момент времени турнира найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

8 В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых и 2 черных (сверху два белых, снизу два черных). Можно ли за несколько ходов поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

