

# Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 3

25 сентября 2021

## Чередование

**0** По кругу расположены 9 шестерёнок так, что первая шестерёнка сцеплена со второй, вторая — с третьей, ..., восьмая — с девятой, девятая — с первой. Будет ли крутиться получившаяся конструкция?

**1** Барон Мюнхгаузен, вернувшись домой из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересёк границу Трапезундии ровно 7 раз. Стоит ли доверять его словам?

**2** Незнайка сказал, что выписал 99 натуральных чисел по кругу так, что каждые два соседних числа отличаются или на 3, или на 5. Не ошибся ли он?

**3** По кругу сидят 100 человек, каждый из которых либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). Каждый сказал: «Мои соседи — рыцарь и лжец». Сколько рыцарей за столом?

**4** В ряд записано 2021 число, сумма любых трёх стоящих подряд чисел равна 100. Первое число равно 15, последнее равно 43. Какое число стоит ровно посередине?

**5** Улитка ползает по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на  $90^\circ$  каждые полчаса. Докажите, что она вернется в начальную точку через **a** целое число часов; **b** чётное число часов.

**6** 17 девочек и 17 мальчиков встали в хоровод. Докажите, что у кого-то с обеих сторон стоят девочки.

**7** Несколько гномов и столько же эльфов сели за круглый стол.

**a** Докажите, что эльфов, справа от которых сидит гном столько же, сколько гномов, справа от которых сидит эльф.

**b** Докажите, что пар сидящих рядом эльфов столько же, сколько пар сидящих рядом гномов.

**8** Юра выложил в ряд 2021 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трёхкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трёхкопеечных монет?

**9** За круглым столом сидят 1543 ребенка. Мальчики врут девочкам, а другими мальчишкам говорят правду. А девочки врут мальчишкам, а другим девочкам говорят правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчишки». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчишки», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребёнок не сказал первому: «Большинство из нас мальчишки». Сколько за столом мальчишек, а сколько девочек?

**10** Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 30 (каждое должно встречаться один раз) таким образом, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась на следующее за ними по часовой стрелке?