

# Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 21

19 марта 2022

## Игры. Выигрышные и проигрышные позиции.

Позиция называется **выигрышной**, если игрок, делающий ход из этой позиции, может затем обеспечить себе выигрыш. В противном случае позиция называется **проигрышной**.

Позиции расставляются с конца по следующим правилам:

- позиция, из которой нельзя сделать ход, — выигрышная или проигрышная в зависимости от условия;
- если из позиции  $X$  можно попасть в проигрышную, то позиция  $X$  — выигрышная;
- если все ходы из позиции  $X$  ведут в выигрышные, то позиция  $X$  — проигрышная.

Победу может обеспечить себе первый игрок, если начальная позиция — выигрышная, и второй, если она проигрышная. Выигрышная стратегия — ходить на проигрышные позиции.

**-1**    **a** В левом нижнем углу доски  $5 \times 5$  стоит хромой король, который за один ход может сдвинуться на одну клетку вправо, на одну клетку вверх или на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Игроки ходят по очереди. Кто не может сделать ход — проиграл. У кого есть выигрышная стратегия?

**b** А если тот, кто не может сделать ход, выигрывает?

**0**    **a** На доске написано число 0. Два игрока по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает игрок, который первый запишет на доске число 30. Кто победит при правильной игре?

**b** Кто выигрывает, если нужно получить число 34?

**1** Вначале в самой левой клетке полоски  $1 \times 100$  стоит фишка. Её за ход сдвигают на одну или две клетки вправо. Проигрывает тот, кто не сможет ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

**2**    **a** Вначале в левом нижнем углу шахматной доски стоит ладья. Её за ход сдвигают вправо или вверх на любое число клеток. Проигрывает тот, кто не сможет ходить. Кто победит при правильной игре?

**b** А если тот, кому некуда ходить, выигрывает, то кто победит?

**3** Вначале на доске написано число 2022. Каждым ходом из написанного числа нужно вычесть любую его ненулевую цифру. Выиграет тот, кто получит 0. Кто выигрывает при правильной игре?

**4**    **a** Игра начинается с числа 1. За ход можно умножить имеющееся число на любое число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

**b** Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 1000. У кого есть выигрышная стратегия?

**5** Имеются две кучки конфет: в одной — 2021, в другой — 2022. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равных кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет: первый или второй?

6 В одной кучке лежит 12 орехов, а в другой 8. За ход можно либо взять сколько угодно орехов из одной кучки, либо взять поровну орехов из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого есть выигрышная стратегия?

7 Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число  $2a$ , либо число  $a + 1$ , где  $a$  — какое-то число, уже написанное на доске. При этом запрещается повторно выписывать уже написанные числа. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

8 В ряд выписаны числа от 1 до 2022. Играют двое, делая ходы поочерёдно. За один ход разрешается вычеркнуть любое из записанных чисел вместе со всеми его делителями. Выигрывает тот, кто зачеркнёт последнее число. Докажите, что у первого игрока есть способ играть так, чтобы всегда выигрывать.