

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 20

5 марта 2022

Дискретная непрерывность

Принцип дискретной непрерывности. В ряд выписано несколько целых чисел таким образом, что любые два соседних числа отличаются не более, чем на единицу. Если первое число отрицательно, а последнее положительно, то где-то в этом ряду есть число 0.

0 В ряд выложено 20 белых и 20 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики — белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых.

1 На сороковой минуте матча «Спартак» выигрывал со счётом 2:1, а на восьмидесятой уже проигрывал 4:5. Обязательно ли был момент, когда счёт был ничейным?

2 У Коли было число 1. Каждую секунду он делал одно из трёх действий: умножал число на одну из его цифр, прибавлял одну из цифр числа или вычитал одну из цифр числа. Когда она закончил, у его числа было 1543 знака. Докажите, что и 100 знаков в какой-то момент тоже было.

3 В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

a Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

b Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?

c Теперь эти же дети сидят по кругу. Всегда ли можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых поровну девочек и мальчиков?

4 За круглым столом сидит 444 гнома в колпаках с помпонами, причем, у любых двух сидящих рядом гномов количество помпонов отличается на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых помпонов на колпаках поровну.

5 Докажите, что можно выбрать 1543 последовательных натуральных числа, среди которых ровно 13 простых.

6 В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется чётное число.

7 Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день?

8 Каждая точка плоскости покрашена либо в жёлтый, либо в голубой цвет. Докажите, что найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1.

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 20

5 марта 2022

Дискретная непрерывность

Принцип дискретной непрерывности. В ряд выписано несколько целых чисел таким образом, что любые два соседних числа отличаются не более, чем на единицу. Если первое число отрицательно, а последнее положительно, то где-то в этом ряду есть число 0.

0 В ряд выложено 20 белых и 20 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики — белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых.

1 На сороковой минуте матча «Спартак» выигрывал со счётом 2:1, а на восьмидесятой уже проигрывал 4:5. Обязательно ли был момент, когда счёт был ничейным?

2 У Коли было число 1. Каждую секунду он делал одно из трёх действий: умножал число на одну из его цифр, прибавлял одну из цифр числа или вычитал одну из цифр числа. Когда она закончил, у его числа было 1543 знака. Докажите, что и 100 знаков в какой-то момент тоже было.

3 В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

a Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

b Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?

c Теперь эти же дети сидят по кругу. Всегда ли можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых поровну девочек и мальчиков?

4 За круглым столом сидит 444 гнома в колпаках с помпонами, причем, у любых двух сидящих рядом гномов количество помпонов отличается на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых помпонов на колпаках поровну.

5 Докажите, что можно выбрать 1543 последовательных натуральных числа, среди которых ровно 13 простых.

6 В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется чётное число.

7 Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день?

8 Каждая точка плоскости покрашена либо в жёлтый, либо в голубой цвет. Докажите, что найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1.