

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 18

12 февраля 2022
И так далее

0 Есть десять монет номиналами в 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 тугриков. Докажите, что ими можно заплатить без сдачи любую сумму от 1 до 1023 тугриков.

1 Докажите, что при помощи набора гирь весом 1, 3, 9, 27, 81 грамм можно отвесить на двухчашечных весах любое целое число грамм от 1 до 121. Гири можно класть на обе чашки весов.

2 Есть n монет достоинством в 1, 2, 3, ..., n динаров. Какое наибольшее число людей могут разделить эти деньги поровну? Найдите ответ для случаев **a** $n = 3, 4, 5, 6, 7$; **b** $n = 99, 100$.

3 **a** Разбейте квадрат 4×4 на доминошки 2×1 и проведите в каждой доминошке диагональ так, чтобы эти диагонали нигде не соприкасались.

b Докажите, что это можно сделать с любым квадратом $2n \times 2n$.

4 Головоломка «Ханойская башня» представляет собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трёх колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Покажите, что это можно сделать за 255 перекладываний.

5 Число a таково, что $a + \frac{1}{a}$ целое. Докажите, что

a $a^2 + \frac{1}{a^2}$ тоже целое;

b $a^3 + \frac{1}{a^3}$ тоже целое;

c все числа вида $a^n + \frac{1}{a^n}$ являются целыми.

6 **a** Докажите, что число, составленное из 27 единиц, делится на 27.

b Докажите, что число, составленное из 3^n единиц, делится на 3^n .

7 В компании из 100 человек у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за 196 разговоров все они могут узнать все новости.

8 Шайка из 7 разбойников делит награбленное. Добыча делится на сколько угодно мелкие части, но у всех разбойников разное мнение о ценности той или иной доли добычи. Докажите, что добычу можно разделить так, чтобы все были довольны (то есть чтобы каждый считал, что у него не меньше $\frac{1}{7}$ всей добычи).

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 18

12 февраля 2022
И так далее

0 Есть десять монет номиналами в 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 тугриков. Докажите, что ими можно заплатить без сдачи любую сумму от 1 до 1023 тугриков.

1 Докажите, что при помощи набора гирь весом 1, 3, 9, 27, 81 грамм можно отвесить на двухчашечных весах любое целое число грамм от 1 до 121. Гири можно класть на обе чашки весов.

2 Есть n монет достоинством в 1, 2, 3, ..., n динаров. Какое наибольшее число людей могут разделить эти деньги поровну? Найдите ответ для случаев **a** $n = 3, 4, 5, 6, 7$; **b** $n = 99, 100$.

3 **a** Разбейте квадрат 4×4 на доминошки 2×1 и проведите в каждой доминошке диагональ так, чтобы эти диагонали нигде не соприкасались.

b Докажите, что это можно сделать с любым квадратом $2n \times 2n$.

4 Головоломка «Ханойская башня» представляет собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трёх колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Покажите, что это можно сделать за 255 перекладываний.

5 Число a таково, что $a + \frac{1}{a}$ целое. Докажите, что

a $a^2 + \frac{1}{a^2}$ тоже целое;

b $a^3 + \frac{1}{a^3}$ тоже целое;

c все числа вида $a^n + \frac{1}{a^n}$ являются целыми.

6 **a** Докажите, что число, составленное из 27 единиц, делится на 27.

b Докажите, что число, составленное из 3^n единиц, делится на 3^n .

7 В компании из 100 человек у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за 196 разговоров все они могут узнать все новости.

8 Шайка из 7 разбойников делит награбленное. Добыча делится на сколько угодно мелкие части, но у всех разбойников разное мнение о ценности той или иной доли добычи. Докажите, что добычу можно разделить так, чтобы все были довольны (то есть чтобы каждый считал, что у него не меньше $\frac{1}{7}$ всей добычи).