

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 17

5 февраля 2022

Постепенное конструирование

0 Представьте число 1 в виде суммы а трёх; б четырёх; в десяти различных дробей с числителем 1.

1 Придумайте а три; б четыре; в десять таких различных чисел, что их сумма делится на каждое из них.

2 В Стране Дураков в ходу монеты в 3 и 5 тугриков. Докажите, что любую сумму, начиная от 8 тугриков, можно заплатить без сдачи такими монетами.

3 Разбейте числа от 1 до 2022 на три равные группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были одинаковыми.

4 Разрежьте квадрат на а 1543; б 2022 квадрата (не обязательно равных).

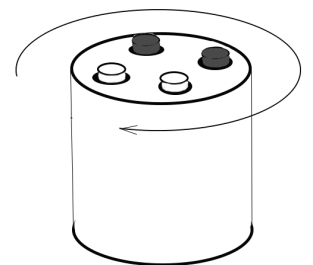
5 Если на доске записано число A , то к нему можно прибавить любой его собственный делитель (то есть отличный от 1 и самого A). Докажите, что из $A = 4$ такими операциями можно получить любое составное число.

6 Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить её в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

7 В мастерской изготавливают квадратные решётки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из трёх стержней длиной 1, сваренных под прямым углом в виде буквы П (см. рисунок). При изготовлении решётки запрещается накладывать стержни друг на друга; можно лишь сваривать их между собой в точках касания. Покажите, как изготовить решётку а 5×5 ; б 2021×2021 .



8 Чтобы войти в пещеру с сокровищами, Али-Баба должен дать завязать себе глаза и разгадать загадку. У пещеры стоит бочка с четырьмя отверстиями в крышке, расположенными по окружности. В каждое отверстие вставлен двухцветный брусок – либо белым, либо черным концом вверх (с завязанными глазами Али-Баба не видит, как ориентирован какой брусок). Так как у Али-Бабы две руки, за раз он может перевернуть один или два бруска. Но после каждого переворачивания бочка начинает быстро вращаться вокруг своей оси, и после ее остановки невозможно понять, как она была ориентирована раньше. Если поставить все брусочки одним цветом вверх, то пещера откроется. Как Али-Бабе получить сокровища?



Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 17

5 февраля 2022

Постепенное конструирование

0 Представьте число 1 в виде суммы а трёх; б четырёх; в десяти различных дробей с числителем 1.

1 Придумайте а три; б четыре; в десять таких различных чисел, что их сумма делится на каждое из них.

2 В Стране Дураков в ходу монеты в 3 и 5 тугриков. Докажите, что любую сумму, начиная от 8 тугриков, можно заплатить без сдачи такими монетами.

3 Разбейте числа от 1 до 2022 на три равные группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были одинаковыми.

4 Разрежьте квадрат на а 1543; б 2022 квадрата (не обязательно равных).

5 Если на доске записано число A , то к нему можно прибавить любой его собственный делитель (то есть отличный от 1 и самого A). Докажите, что из $A = 4$ такими операциями можно получить любое составное число.

6 Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить её в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

7 В мастерской изготавливают квадратные решётки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из трёх стержней длиной 1, сваренных под прямым углом в виде буквы П (см. рисунок). При изготовлении решётки запрещается накладывать стержни друг на друга; можно лишь сваривать их между собой в точках касания. Покажите, как изготовить решётку а 5×5 ; б 2021×2021 .



8 Чтобы войти в пещеру с сокровищами, Али-Баба должен дать завязать себе глаза и разгадать загадку. У пещеры стоит бочка с четырьмя отверстиями в крышке, расположенными по окружности. В каждое отверстие вставлен двухцветный брусок – либо белым, либо черным концом вверх (с завязанными глазами Али-Баба не видит, как ориентирован какой брусок). Так как у Али-Бабы две руки, за раз он может перевернуть один или два бруска. Но после каждого переворачивания бочка начинает быстро вращаться вокруг своей оси, и после ее остановки невозможно понять, как она была ориентирована раньше. Если поставить все брусочки одним цветом вверх, то пещера откроется. Как Али-Бабе получить сокровища?

