

# Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 16

29 января 2022

## Сборная солянка

**1** Кирилл хочет покрасить в черный цвет некоторые клетки белой таблицы  $8 \times 8$  так, чтобы в каждой строке белых клеток было больше, чем черных, а в каждом столбце — белых меньше, чем черных. Получится ли у него?

**2** Среди 43 камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера для любой кучки камней можно проверить, есть ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

**3** Пусть  $p > 3$  — простое число. Докажите, что  $p^2 - 1$  делится на 24.

**4** В графе 18 вершин, причём степень каждой вершины равна 2 или 5, вершины обеих степеней присутствуют. Сколько компонент связности может быть в таком графе?

**5** В клетках доски  $8 \times 8$  расставлены числа  $1, 2, \dots, 64$ . Докажите, что найдётся пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются не менее чем на 5.

**6** В равенстве  $\text{ДУБ} + \text{ДУБ} + \text{ДУБ} + \dots + \text{ДУБ} = \text{РОЩА}$  одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, а разными — разные. Какое наибольшее число дубов может быть в роще?

**7** Можно ли клетчатую доску  $101 \times 101$  замостить без пропусков и наложений доминошками  $1 \times 2$  и крестами из 5 клеток?

**8** На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь из сорока разбойников. У них есть одна лодка, в которой могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Но разбойники согласны плыть на лодке только с друзьями, а дружат между собой только разбойники, стоящие рядом (первый со вторым, второй — с первым и третьим, третий — со вторым и четвёртым, и т.д.) Когда разбойники поняли, что не смогут перебраться на другой берег, и уже собрались уходить, к ним подошёл Али-Баба, друживший с первым и вторым разбойниками, и они все вместе смогли перебраться на другой берег. Как они смогли это сделать?

**9** В графе степени всех вершин равны 5. Его рёбра покрасили в три цвета так, что по рёбрам каждого цвета можно пройти от любой вершины до любой другой. Сколько вершин может быть в этом графе?

# Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 16

29 января 2022

## Сборная солянка

**1** Кирилл хочет покрасить в черный цвет некоторые клетки белой таблицы  $8 \times 8$  так, чтобы в каждой строке белых клеток было больше, чем черных, а в каждом столбце — белых меньше, чем черных. Получится ли у него?

**2** Среди 43 камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера для любой кучки камней можно проверить, есть ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

**3** Пусть  $p > 3$  — простое число. Докажите, что  $p^2 - 1$  делится на 24.

**4** В графе 18 вершин, причём степень каждой вершины равна 2 или 5, вершины обеих степеней присутствуют. Сколько компонент связности может быть в таком графе?

**5** В клетках доски  $8 \times 8$  расставлены числа  $1, 2, \dots, 64$ . Докажите, что найдётся пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются не менее чем на 5.

**6** В равенстве  $\text{ДУБ} + \text{ДУБ} + \text{ДУБ} + \dots + \text{ДУБ} = \text{РОЩА}$  одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, а разными — разные. Какое наибольшее число дубов может быть в роще?

**7** Можно ли клетчатую доску  $101 \times 101$  замостить без пропусков и наложений доминошками  $1 \times 2$  и крестами из 5 клеток?

**8** На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь из сорока разбойников. У них есть одна лодка, в которой могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Но разбойники согласны плыть на лодке только с друзьями, а дружат между собой только разбойники, стоящие рядом (первый со вторым, второй — с первым и третьим, третий — со вторым и четвёртым, и т.д.) Когда разбойники поняли, что не смогут перебраться на другой берег, и уже собрались уходить, к ним подошёл Али-Баба, друживший с первым и вторым разбойниками, и они все вместе смогли перебраться на другой берег. Как они смогли это сделать?

**9** В графе степени всех вершин равны 5. Его рёбра покрасили в три цвета так, что по рёбрам каждого цвета можно пройти от любой вершины до любой другой. Сколько вершин может быть в этом графе?