

Математическая вертикаль, спецкурс, занятие 10

27 ноября 2021

Принцип крайнего

0 **a** По окружности расставлено 1543 числа, каждое из них равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все числа равны.

b Можно ли расставить на клетчатой плоскости несколько ладей так, чтобы каждая была хотя бы трёх других?

c На доске по кругу написано 13 нулей и единиц (и нули, и единицы присутствуют). Вовочка вписал в промежутки между одинаковыми числами нули, а в промежутки между разными числами единицы, после чего стёр старые числа. Эту операцию он повторил ещё несколько раз. Могли ли в какой-то момент все 13 чисел на доске стать одинаковыми?

1 Можно ли в вершинах куба расставить числа от 1 до 8 так, чтобы разность любых двух соседних по ребру чисел была не больше двух? (Из большего вычитаем меньшее.)

2 Несколько семиклассников встали в круг. Оказалось, что у каждого семиклассника хотя бы один сосед не ниже его. Могут ли все они быть разного роста?

3 Шахматная доска разбита на доминошки 1×2 . Докажите, что найдётся пара доминошек, образующая квадрат 2×2 .

4 Существуют ли 4 числа, попарные разности между которыми равны

a 2, 2, 3, 4, 5 и 6; **b** 3, 5, 8, 11, 12 и 20?

5 Можно ли расставить на клетчатой плоскости несколько коней так, чтобы каждый бил хотя бы **a** четырёх **b** пять других?

6 2021 астроном на 2021 разных планетах наблюдают друг за другом при помощи телескопов, причём каждый наблюдает за ближайшим к нему (все расстояния между планетами различны).

a Докажите, что есть две планеты, астрономы на которых наблюдают друг за другом.

b Может ли быть такое, что за каждым астрономом наблюдает ровно один другой астроном?

7 Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске на одну клетку по вертикали или горизонтали. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в её цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на чёрную доску размерами 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить её в шахматном порядке?

8 На шахматной доске расставлено десять королей. На каждом ходу одного из королей сдвигают на одну клетку в любом направлении (по вертикали, горизонтали или диагонали). Один король может ходить несколько раз подряд. После нескольких ходов оказалось, что каждый король побывал во всех клетках ровно по одному разу и вернулся на исходную клетку. Докажите, что был момент, когда ни один из королей не стоял на своей исходной клетке.