

Остатки. Жёлтые.

Остатки сладки

Вступление

Разделить натуральное число a на $b \neq 0$ с остатком — это представить a в виде $a = b \cdot k + r$, где $0 \leq r < b$. Число k называется **неполным частным**, а число r — **остатком**. Часто говорят, что число a даёт остаток r **по модулю** b .

1 Маша проболела урок и сделала примеры на деление с остатком так: а) $20 = 3 \cdot 4 + 8$; б) $19 = 3 \cdot 5 + 4$; в) $-11 = 2 \cdot (-5) - 1$. Объясните её ошибки.

2 Число даёт остаток 3 при делении на 22

а Делится ли оно на 3?

б Делится ли оно на 4?

3 **а** Сумма двух чисел делится на 7. Что можно сказать про их остатки от деления на 7? **б** А если речь идёт про разность? **в** А если про умножение?

Задачи

1 Найдите все натуральные числа, у которых остаток при делении на 9 ровно в два раза больше частного.

2 Число a кратно 3. Может ли остаток от деления числа a на 12 быть равным 2?

3 Делимое и делитель увеличили в 3 раза. Как изменились неполное частное и остаток?

4 Докажите, что из любых 10 чисел можно выбрать 2 таким образом, чтобы их разность делилась на 9. Верно ли это, если в ряд выписано 9 чисел?

5 Царь Кощей чахнет над золотом. Когда он раскладывает свои монеты стопками по девять штук, у него остается восемь монет. Сколько монет может оставаться, когда он будет раскладывать монеты стопками по 18 штук?

6 Давайте разрешим в задаче 4 не только вычитать, но и складывать числа. Какое наименьшее количество чисел теперь надо выписать, чтобы из них можно было бы гарантированно выбрать 2 так, чтобы их сумма или разность делилась бы на 9.

7 (СУПЕР 1) Каждое из чисел от 1 до 1000 заменили на его сумму цифр. Каждое из полученных чисел вновь заменили на его сумму цифр. Так делали, пока не получили миллион однозначных чисел. Каких чисел среди них больше: единиц или двоек?

Остатки. Жёлтые. Часть 2.

Снова вступление

4 Посмотрите на таблицы сложения и умножения остатков по модулям 2 и 3. Заполните пропуски в таблицах сложения и умножения по модулю 4.

$+$	0	1	\times	0	1	$+$	0	1	2	\times	0	1	2	$+$	0	1	2	3	\times	0	1	2	3
0	0	1	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	2	0	1	0	1	2	1	1	2	3		1	0	1		3
						2	2	0	1	2	0	2	1	2	3				2	0			
											3	3		3	3				3	0	3		1

5 Делится ли число $13^{42} + 42^{16}$ на 5?

Снова задачи

8 Найдите последнюю цифру числа 2022^{2022}

9 Докажите, что $n^3 + 2 \cdot n$ делится на 3 при любом натуральном n ($n^3 = n \cdot n \cdot n$).

10 Пусть $a^2 + b^2$ делится на 7. Докажите, что их произведение обязательно делится на 7.