

Комбинаторика 2. Жёлтые.

Вступление

1 По итогам урока я хочу выбрать три человека, чтобы одному поставить 5, одному 4, а одному 3. Давайте считать, что люди должны быть разными. Сколькими способами я смогу это сделать?

2 А если надо выбрать трёх, но для того, чтобы всем поставить 5? Почему ответ отличается от предыдущей задачи?

3 Представим, что теперь в классе n людей, а я хочу выбрать m . Какой будет ответ?

*Пусть имеется набор из n различных объектов. Количество способов выбрать из этого набора k объектов называется **числом сочетаний** и обозначается C_n^k (читается «цэ из n по k »).*

Так же, как степени и факториалы, числа сочетаний C_n^k можно писать в ответе, не вычисляя их.

4 Формула для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 В графе на n вершинах провели все рёбра. Сколько оказалось рёбер?

2 На плоскости отметили 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

a Сколько существует отрезков с концами в отмеченных точках?

b Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

3 Рота состоит из 20 офицеров и 60 рядовых.

a Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера и 20 рядовых?

b А если офицеров надо выбрать 5?

4 На доске выписаны числа от 1 до 100. Сколькими способами можно выбрать из них три так чтобы

a Минимальное из выбранных было бы больше 10?

b Каждое делилось бы на 7?

c Их сумма была бы чётна?

Комбинаторика. Числа сочетаний. Жёлтые. Добавка.

5 **a** В классе 24 ученика. Нужно выбрать из них шестерых дежурных в раздевалку и троих дежурных в столовую. Сколькими способами можно это сделать? (Один человек не может дежурить и там, и там.)

b А сколько есть способов выбрать дежурных так, чтобы ученик этого класса Коля Васин обязательно дежурил в столовой?

6 Сколько семизначных чисел можно составить: **a** из трёх четвёрок и четырёх троек; **b** из трёх пятерок и четырёх нулей?

7 Сколько существует 23-значных чисел, сумма цифр которых равна четырём?

8 Найдите количество семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встречаться только цифры 4, 5, 6, 7 (причём каждая есть хотя бы один раз) и таких, что каждая цифра не меньше предыдущей.

9 Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы

a среди них был ровно один туз?

b среди них был хотя бы один туз?

Суперзадача

1 Сколькими способами можно выложить в ряд пять красных, пять синих и пять зелёных шаров так, чтобы какие-то два синих шара обязательно лежали рядом?

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Комбинаторика. Числа сочетаний. Зелёные.

Вступление

1 У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

a Сколькими способами он может выбрать одного из них себе на завтрак, другого на обед, а третьего на ужин?

b А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

2 В зелёную группу кружка ходит 28 человек. Сколькими способами можно выбрать из них команду, состоящую из капитана, заместителя и ещё 4 человек, для участия в турнире матбоёв?

Пусть имеется набор из n различных объектов. Количество способов выбрать из этого набора k объектов называется **числом сочетаний** и обозначается C_n^k (читается «цэ из n по k »).

Так же, как степени и факториалы, числа сочетаний C_n^k можно писать в ответе, не вычисляя их.

3 Формула для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 На плоскости отметили 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

a Сколько существует отрезков с концами в отмеченных точках?

b Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

2 Рота состоит из трёх офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

3 a В классе 24 ученика. Нужно выбрать из них шестерых дежурных в раздевалку и троих дежурных в столовую. Сколькими способами можно это сделать? (Один человек не может дежурить и там, и там.)

b А сколько есть способов выбрать дежурных так, чтобы ученик этого класса Коля Васин обязательно дежурил в столовой?

4 Сколько решений имеет ребус

a Э < К < З < Е < М < П < Л < Я < Р

b П < Я < Т < Ё < Р < К < А

где разными буквами обозначены разные цифры?

5 Сколько семизначных чисел можно составить: a из трёх четвёрок и четырёх троек; b из трёх пятерок и четырёх нулей?

Комбинаторика. Числа сочетаний. Зелёные. Добавка.

6 Сколькими способами можно переставить буквы слова СОЧЕТАНИЯ так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

7 Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем трёх букв Б?

8 **a** Сколькими способами можно разделить 30 человек на **b** две;
c три одинаковые команды?

9 У Ани есть список из 50 задач по комбинаторике. Она хочет составить из них листочки для жёлтой, зелёной и синей группы. Сколькими способами она может это сделать, если в каждом листочке должно быть по 10 задач, и все три листочка должны получиться разными? (Некоторые задачи могут повторяться, главное, чтобы листочки не совпадали полностью.)

10 Сколькими способами можно выложить в ряд пять красных, пять синих и пять зелёных шаров так, чтобы какие-то два синих шара обязательно лежали рядом?

Суперзадача

1 В выпуклом n -угольнике провели все диагонали. Оказалось, что никакие три из них не проходят через одну точку. Найдите число точек пересечения диагоналей (не считая вершин).

Числа сочетаний. Синие.

— Он ведь тоже мучается, он, значит, наш, правда ведь?
Платонов. Котлован

Обозначим за C_n^k число способов выбрать из n объектов (людей, позиций) какие-то k .

В конце листка мы, конечно, выведем, его явную формулу, но пользоваться ей для решения задач листка нельзя. Можете считать, что C_n^k - это некоторая константа, которая неизвестна вам, но известна принимающему.

Например, ваш ответ может быть $C_4^2 + 2 \cdot C_5^3$

1 На плоскости отметили 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

a Сколько существует отрезков с концами в отмеченных точках?

b Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

2 Рота состоит из трёх офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

3 Слово состоит из n букв A и k букв B . Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в этом слове?

4 Докажите, что

a $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$

b $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

c $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$

5 Сколько решений имеет ребус

a Э < К < З < Е < М < П < Л < Я < Р

b П < Я < Т < Ё < Р < К < А

где разными буквами обозначены разные цифры?

6 Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы

a среди них был ровно один туз?

b среди них был хотя бы один туз?

Комбинаторика. Числа сочетаний. Синие. Добавка.

7 У меня есть 20 одинаковых шаров. Я хочу положить их в четыре разных ящика. Сколькими способами я смогу это сделать.

a Если в каждом ящике должен быть хоть один шарик

b Если условия из пункта а) не требуется.

8 Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 80 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 15 монет. Сколько существует способов это сделать?

9 Сколькими способами можно выложить в ряд пять красных, пять синих и пять зелёных шаров так, чтобы какие-то два синих шара обязательно лежали рядом?

10 В выпуклом n -угольнике провели все диагонали. Оказалось, что никакие три из них не проходят через одну точку. Найдите число точек пересечения диагоналей (не считая вершин).

11 Выведите явную формулу чисел сочетаний.