

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Множества и круги Эйлера. Жёлтые.

Во вселенной бесщётное множество миров, а я ещё и одного не завоевал!

Александр Македонский

Вступление

1 На доске нарисованы два круга, внутри которых отмечено несколько точек. Внутри первого из них всего 190 отмеченных точек. Внутри второго — всего 230 отмеченных точек. Внутри обоих кругов одновременно находится ровно 70 точек. А сколько отмеченных точек всего?

2 Дима провёл социальный опрос и выяснил про жителей своего подъезда, что 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолете. Среди летавших на самолете 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 еще и летали на самолете. От управдома Дима узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врёт ли управдом?

Задачи для самостоятельного решения

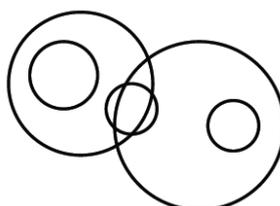
1 В саду у Ани и Вити росло 3000 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно треть кустов, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

2 В классе 29 человек. 15 из них занимаются в музыкальном кружке, 21 — в математическом. Сколько человек посещают оба кружка, если известно, что только Петя не ходит ни в один из двух кружков?

3 Два колокола начали бить одновременно. Удары одного следуют через 2 секунды, а другого — через три секунды. Сколько ударов слышно в минуту, если одновременные удары двух колоколов считать за один?

4 У каждого из 30 шестиклассников есть одна ручка, один карандаш и одна линейка. После их участия в олимпиаде оказалось, что 26 учеников потеряли ручку, 23 — линейку и 21 — карандаш. Найдите наименьшее возможное количество шестиклассников, потерявших все три предмета.

5 Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?



Множества и круги Эйлера. Жёлтые. Добавка.

6 а) Сколько существует натуральных чисел от 1 до 100, которые делятся на 3? На 5? На 15?

б) А сколько натуральных чисел от 1 до 100 не делятся ни на 3, ни на 5?

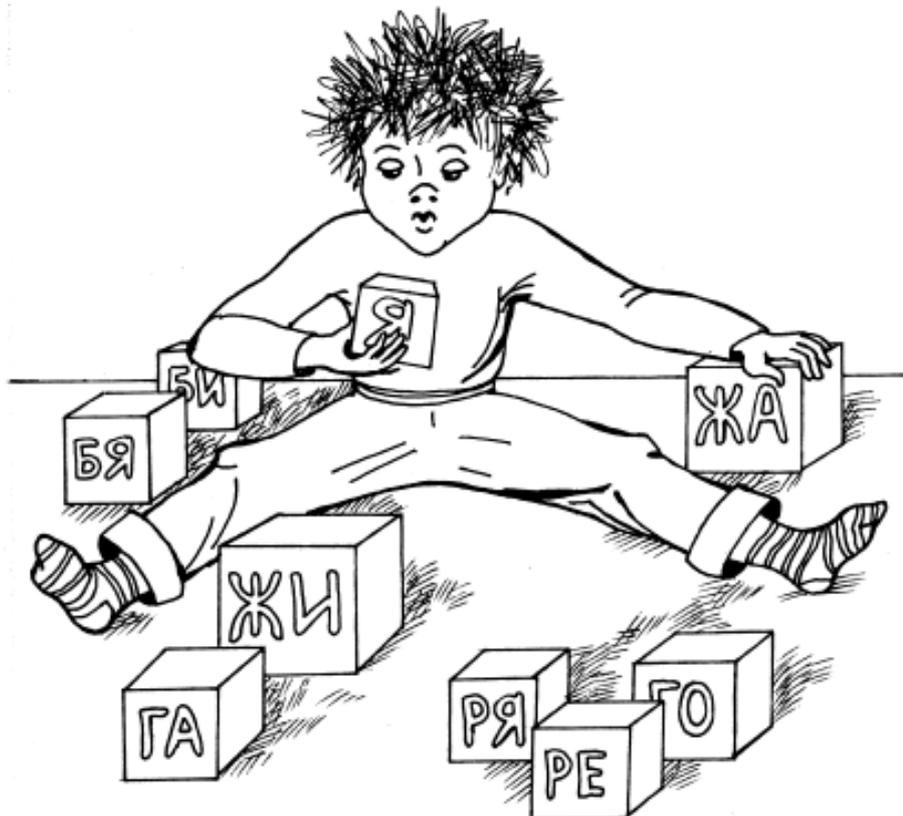
7 В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано МА, на остальных — НЯ. Каждый ребёнок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово МАМА могут сложить из своих карточек 20 детей, слово НЯНЯ — 30 детей, а слово МАНЯ — 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

8 Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

Суперзадачи

9 В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

10 Пол комнаты площадью 6 м^2 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 м^2 . Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2 .



Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Множества и круги Эйлера. Зелёные.

Во вселенной бесщётное множество миров, а я ещё и одного не завоевал!

Александр Македонский

Вступление

1 Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

2 Дима провёл социальный опрос и выяснил про жителей своего подъезда, что 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолете. Среди летавших на самолете 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 еще и летали на самолете. От управдома Дима узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врёт ли управдом?

Задачи для самостоятельного решения

1 В гимназии учится 100 человек, и они все знают хотя бы один из древних языков — греческий или латынь, некоторые — оба языка. 85 учеников знают греческий язык и 75 учеников знают латынь. Сколько учеников знают оба языка?

2 У каждого из 30 шестиклассников есть одна ручка, один карандаш и одна линейка. После их участия в олимпиаде оказалось, что 26 учеников потеряли ручку, 23 — линейку и 21 — карандаш. Найдите наименьшее возможное количество шестиклассников, потерявших все три предмета.

3 **a** Сколько существует натуральных чисел от 1 до 1000, которые делятся на 3? На 5? На 15?

b А сколько натуральных чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 3, ни на 5?

c Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

4 В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано МА, на остальных — НЯ. Каждый ребёнок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово МАМА могут сложить из своих карточек 20 детей, слово НЯНЯ — 30 детей, а слово МАНЯ — 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

5 В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме Р, которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме К, которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово КОТ, 18 других учеников — слово РОТ, а остальных — слово КРОТ. При этом слова КОТ и РОТ оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали своё слово верно?

Множества и круги Эйлера. Зелёные. Добавка.

6 Антон, Артём и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если её решил только один человек, и лёгкой, если её решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества лёгких?

7 Юра, Лёша и Миша коллекционируют марки. Количество Юриных марок, которых нет у Лёши, меньше, чем количество марок, которые есть и у Юры, и у Лёши. Точно так же, число Лёшиных марок, которых нет у Миши, меньше, чем число марок, которые есть и у Лёши и у Миши. А число Мишиных марок, которых нет у Юры, меньше, чем число марок, которые есть и у Юры и у Миши. Докажите, что какая-то марка есть у каждого из трех мальчиков.

8 Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

9 В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

10 Пол комнаты площадью 6 м^2 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 м^2 . Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2 .

Суперзадача

1 Петя нарисовал на плоскости квадрат 8×8 , разделил на 64 одинаковых квадрата и раскрасил их в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратов. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений (она может выходить за границы квадрата) и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или чёрного?

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Множества и круги Эйлера. Синие.

Во вселенной бессчётное множество миров, а я ещё и одного не завоевал!

Александр Македонский

1 **а** Два колокола начали бить одновременно. Первый колокол бьёт раз в 2 секунды, а второй — раз в 3 секунды. Сколько ударов мы услышим за минуту, если одновременные удары считать за один?

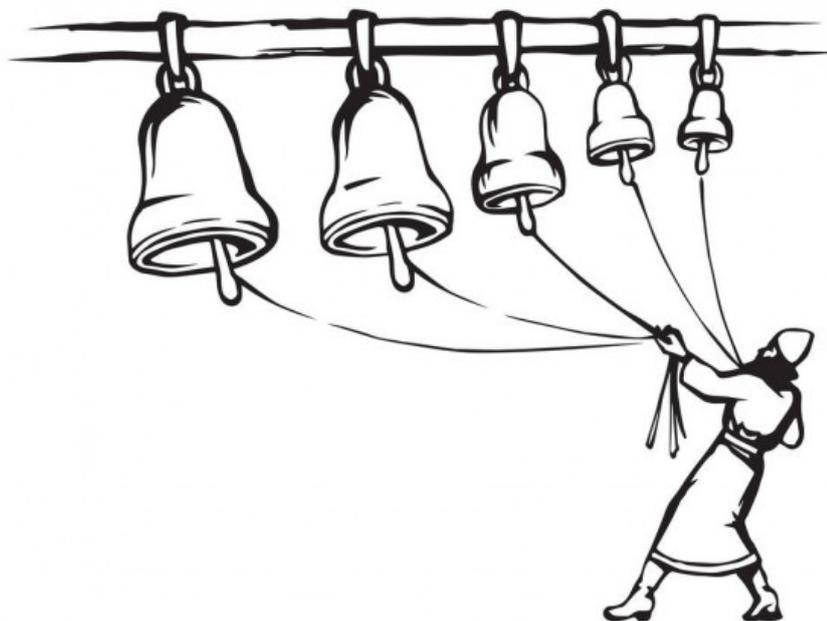
б Представьте, что теперь добавился третий колокол, бьющий раз в 5 секунд. Как изменится ответ?

2 В группе 40 туристов. Из них 20 человек знают английский язык, 15 — французский, 11 — испанский. Английский и французский знают 7 человек, английский и испанский — 5, французский и испанский — 3. Двое туристов знают все три языка. Сколько человек в группе не знает ни одного из этих языков?

3 У каждого из 30 шестиклассников есть одна ручка, один карандаш и одна линейка. После их участия в олимпиаде оказалось, что 26 учеников потеряли ручку, 23 — линейку и 21 — карандаш. Найдите наименьшее возможное количество шестиклассников, потерявших все три предмета.

4 Кое-кто в классе смотрит футбол, кое-кто — мультики, но нет таких, кто не смотрит ни то, ни другое. У любителей футбола средний балл по математике меньше 4, у любителей мультиков — тоже. Может ли в классе в целом средний балл по математике быть больше 4?

5 Антон, Артём и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если её решил только один человек, и лёгкой, если её решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества лёгких?



Множества и круги Эйлера. Синие. Добавка.

6 На контрольной дали четыре задачи. Один школьник умеет решать их все. Каждую тройку задач умеют решать два школьника. Каждую пару задач — 6 школьников. Каждую задачу в отдельности умеют решать 15. Какое наименьшее количество школьников могло писать контрольную?

7 В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

8 Пол комнаты площадью 6 м^2 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 м^2 . Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2 .

9 Давайте попробуем решить задачу в общем виде.

Некоторое неизвестное число людей учит различные иностранные языки. Каждый учит хотя бы один язык. Мы знаем общее число языков k , и кроме этого мы знаем числа a_1, a_2, \dots, a_k , про которые известно, что

- (1) Каждый язык учит a_1 человек.
- (2) Для каждой пары из двух языков существует ровно a_2 людей, которые учат оба выбранных языка.
- (3) Для каждой группы из трёх языков существует ровно a_3 людей, которые учат все три языка из выбранной группы.
- ...
- ($k-1$) Для каждой группы из $k-1$ языков существует ровно a_{k-1} людей, которые учат все $k-1$ языков из выбранной группы.
- (k) Ровно a_k человек учат все языки.

Хотим понять, сколько было всего людей. Давайте считать, что все числа корректны, то есть такая ситуация действительно произошла.

10 Петя нарисовал на плоскости квадрат 8×8 , разделил на 64 одинаковых квадрата и раскрасил их в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратов. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений (она может выходить за границы квадрата) и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или чёрного?