

Деревья-2. Жёлтые

Вступление

Заметим довольно важное свойство деревьев: это связный граф с минимальным числом рёбер.

1 Докажите, что из любого связного графа, не являющегося деревом, можно выкинуть несколько рёбер, чтобы он продолжил быть связным.

2 Докажите, что из дерева нельзя выкинуть ни одного ребра, чтобы соблюдалось свойство из предыдущей задачи.

3 Вспоминаем, что мы вообще знаем про деревья.

4 Есть волейбольная сетка $2 \cdot 5$. Какое максимальное число веревок, её составляющих, можно разрезать так, чтобы она не распалась?

Задачи

1 В графе без циклов 7 вершин и 4 ребра. Как такое может быть?

2 У царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

3 В дереве ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин в нём в этом случае имеют степень 3?

4 В связном графе на 10 вершинах есть три вершины степени 4.

a) Может ли он быть деревом?

b) А какое максимальное число вершин степени 4 может быть у дерева на 4 вершины?

5 Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

6 Дано дерево, содержащее $2n + 1$ вершину. Докажите, что из него можно выбрать как минимум $n + 1$ так, чтобы никакие две из выбранных не были бы соединены ребром.

7 Каждый из 450 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не бил.

8 Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.

9 В стране несколько городов, в каждом живёт сколько-то жителей. Между двумя городами есть дорога, если количества жителей в этих городах имеют общий делитель, больший 1. Оказалось, что сумма величин, обратных к количествам жителей во всех городах, равна 1. Докажите, что из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого.