Математический кружок 6 класса в школе 1543.

Вспоминаем графы. Жёлтые.

____

Вступление

1 В графе 15 вершин. Степени его вершин и не меньше 7 каждая. Докажите, что по ребрам графа можно пройти из вершины в вершину B.

.

2 При каких n можно расположить в пространстве n одинаковых шаров так, чтобы каждый касался ровно трех других?

Задачи

3 Найдите наименьшее количество вершин в графе, сумма степеней вершин в котором равна 20.

4 Докажите, что не существует графа на пяти вершинах, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

5 Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1? А если ребро 21?

6 Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец.

7 Докажите, что если в графе есть хотя бы две вершины, то найдутся две одинаковой степени

8 В графе 100 вершин и 800 рёбер

a Докажите, что в нём найдётся хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

b Может ли степень всех вершин быть ровно 16?

9 Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 13 островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

10 В классе стоят компьютеры, пронумерованные числами $1, 2, \ldots, 99$. Если сумма всех цифр в номерах двух компьютеров делится на 3, то эти компьютеры соединены проводом. (Например, между компьютерами 4 и 23 есть провод, поскольку $4+2+3=9$ делится на 3. А между компьютерами 17 и 26 провода нет, поскольку $1+7+2+6=16$ на 3 не делится.) Можно ли по проводам передать файл с компьютера 15 на компьютер 43 (возможно, через промежуточные компьютеры)?

11 Докажите, что для любого $k<n$, что kn - чётное, существует граф на n вершинах, все степени которого равны k.