

Остатки. Зелёные.

Остатки сладки

Вступление

Разделить натуральное число a на $b \neq 0$ с остатком — это представить a в виде $a = b \cdot k + r$, где $0 \leq r < b$. Число k называется **неполным частным**, а число r — **остатком**. Часто говорят, что число a даёт остаток r **по модулю** b .

1 Какое-то число при делении на 85 даёт остаток 34. Делится ли это число **a** на 17; **b** на 5?

2 Петя и Вася загадали по числу. Петино число даёт при делении на 43 остаток 24, а Васино — остаток 30. Какой остаток при делении на 43 даёт **a** сумма Петино и Васиного числа; **b** разность Петино и Васиного числа; **c** произведение Петино и Васиного числа?

3 Посмотрите на таблицы сложения и умножения остатков по модулям 2 и 3. Заполните пропуски в таблицах сложения и умножения по модулю 4.

| | | |
|---|---|---|
| + | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| × | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| × | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | |
| 2 | | 3 | 0 | |
| 3 | 3 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | 3 |
| 2 | 0 | | | |
| 3 | 0 | 3 | | 1 |

4 Какой остаток при делении на 5 даёт 2^{100} ?

Задачи для самостоятельного решения

1 Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

2 Царь Кощей чахнет над золотом. Когда он раскладывает свои монеты стопками по девять штук, у него остается восемь монет. Сколько монет может оставаться, когда он будет раскладывать монеты стопками по 18 штук?

3 Найдите наименьшее натуральное число, большее 1, которое при делении на 2, 3, 5 и 7 даёт остаток 1.

4 На какую цифру оканчивается 2022^{2021} ?

5 **a** Какие остатки может давать квадрат натурального числа при делении на 3? на 4? на 8?

b Сумма квадратов двух чисел делится на 4. Докажите, что оба эти числа чётные.

c Незнайка придумал два натуральных числа, возвёл каждое из них в квадрат и результаты сложил. Получилось 1543. Докажите, что Незнайка где-то ошибся.

Остатки. Зелёные. Добавка.

6 Найдите последнюю цифру числа $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 999 \cdot 1000$.

7 Натуральные числа A , B и C таковы, что $A^2 + B^2 = C^2$ (такие числа называются *пифагоровыми тройками*). Докажите, что хотя бы одно из чисел A и B делится на 3.

8 Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

9 Сумма 1543 натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма кубов этих чисел тоже делится на 6.

10 У Ивана-царевича есть два волшебных меча. Первым он может отрубить Змею Горынычу 21 голову. Вторым — 3 головы, но при этом у Змея Горыныча отрастает 1543 головы. Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов? (Если, например, у Змея Горыныча осталось лишь две головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя.)

Суперзадача

1 На доске было написано число из нескольких семёрок: $777 \dots 77$. Влад стёр у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стёртую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию, и так далее. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.

