

Числа сочетаний-2. Зелёные.

Как я люблю сочетание приятного с бесполезным.

Н. В. Богословский

Вступление

Пусть в наборе n различных объектов. **Числом сочетаний** C_n^k (читается «цэ из n по k ») называется количество способов выбрать из этого набора k объектов.

- 1
 - a) Сколько «слов» можно составить из 4 букв Ъ и 6 букв Ь?
 - b) А сколько «слов» можно составить из 4 букв Ъ, 6 букв Ь и 5 букв Ы?
- 2
 - a) Для матбоя из 43 шестиклассников нужно выбрать команду из шести человек и назначить одного из них капитаном. Сколькими способами можно это сделать?
 - b) Докажите, что $n \cdot C_{n-1}^{k-1} = k \cdot C_n^k$.

Задачи для самостоятельного решения

- 1 Улитка сидит в нижнем левом углу прямоугольника 7×9 . Она может ползать только вправо и вверх и только по линиям сетки. Сколькими способами она может добраться из левого нижнего угла в правый верхний?
- 2
 - a) Есть 10 разных штампов. Сколькими способами можно отдать 6 штампов Ане, а остальные Асе? А сколькими способами можно отдать 4 штампа Ане, а остальные Асе?
 - b) Докажите, что $C_{a+b}^a = C_{a+b}^b$.
- 3
 - a) В коробке 25 разных конфет, Олег хочет съесть 6 из них. Сколькими способами он может это сделать? Сколькими способами он может это сделать, если он обязательно хочет съесть конфету «трюфель»? А сколькими способами Олег может это сделать, если «трюфель» он есть не хочет?
 - b) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
- 4
 - a) На кружок пришло 15 шестиклассников. Сколькими способами их можно рассадить в 202 и 203 кабинеты? (Кабинеты могут пустовать.) Решите задачу двумя способами: через числа сочетаний и без них.
 - b) Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.
- 5
 - a) В ряд выложено 20 одинаковых шариков. Сколькими способами можно разложить в промежутки между ними 4 перегородки? (Перегородки не могут лежать с краю, и между любыми двумя перегородками обязательно есть хотя бы один шар.)
 - b) Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 разным ящикам? В каждый ящик обязательно должен попасть хотя бы один шар.
 - c) В магазине есть конфеты 7 разных сортов. Маша хочет купить 43 конфеты, причём среди них должно быть хотя бы по одной конфете каждого сорта. Сколькими способами она может сделать это?

Числа сочетаний-2. Зелёные. Добавка.

6 **a** В языке племени АББА словом считается любая последовательность букв А и Б. Если в слове чётное число букв А, то оно имеет женский род, а если нечётное — то мужской. Учёные-лингвисты выписали все 10-буквенные слова этого языка. Слов какого рода в этом списке больше: женского или мужского?

b Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - \dots \pm C_n^n = 0$.

7 Меню школьной столовой не меняется и состоит из 10 блюд. Для разнообразия Вовочка хочет каждый день заказывать такой набор блюд, который он еще ни разу не заказывал (при этом число блюд не важно — он может заказать все 10 блюд, а может заказать только одно или вовсе ни одного).

a Сколько дней он сможет так питаться?

b Сколько раз за всё это время он съест тарелку борща? Сколько блюд он съест всего?

c Докажите, что $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + (n-1) \cdot C_n^{n-1} + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

8 **a** В ряд выложено 20 одинаковых шариков. Сколькими способами можно разложить между ними 4 перегородки? Теперь перегородки могут лежать рядом, и могут лежать слева или справа от ряда шариков, а не только в промежутках.

b Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 разным ящикам? Ящики могут остаться пустыми.

c В магазине есть конфеты 7 разных сортов. Маша хочет купить 43 конфеты (причём конфеты некоторых сортов она может вообще не брать). Сколькими способами она может сделать это?

9 Сколько существует 7-значных чисел, цифры в которых нестрого убывают?

Суперзадача

1 **a** Есть 15 девочек и 15 мальчиков. Для участия в конкурсе бальных танцев из них нужно выбрать команду, в которой поровну девочек и мальчиков. Докажите, что это можно сделать C_{30}^{15} способами. (Команда может быть любого размера. В частности, можно не посылать на конкурс вообще никого, или, наоборот, послать всех.)

b Докажите, что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$